ESTUDOS RBEP

Operação de multiplicação: possibilidades de intervenção com jogos

Sônia Bessa[I, II]
Váldina Gonçalves da Costa[III, IV]

http://dx.doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.98i248.2576

Resumo

Estudo de natureza empírica com delineamento quase experimental. A pesquisa teve como objetivos investigar o nível de compreensão da multiplicação pelos alunos do 4º ano do ensino fundamental I; e realizar intervenção com jogos de regras e desafios específicos para o desenvolvimento da operação de multiplicação. Foi realizada uma intervenção pedagógica com 14 alunos por meio do método clínico. A intervenção foi eficaz na construção da operação de multiplicação aritmética pelos estudantes que não a dominavam, os quais apresentaram expressivos progressos nas noções aritméticas. A utilização de jogos e desafios mostrou que estes podem atender a necessidades cognitivas e afetivas dos estudantes.

Palavras-chave: intervenção pedagógica; multiplicação; jogos matemáticos.

I Universidade Estadual de Goiás (UEG), Formosa, Goiás, Brasil. *E-mail*: <soniabessa@gmail.com>; <http://orcid.org/0000-0001-9857-6523>.

II Doutora em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), Campinas, São Paulo, Brasil.

III Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil. *E-mail*: <valdina.costa@gmail.com>; <http://orcid.org/0000-0002-8636-7764>.

IV Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, São Paulo, Brasil.

Abstract

Multiplication operation: possibilities for intervention with games

This is a study of an empirical nature with a near-experimental design. The research aimed to investigate the level of understanding of multiplication by the students of the 4th year of elementary school; and performing intervention with games with rules and specific challenges for the development of the multiplication operation. The pedagogical intervention was performed with 14 students using the clinical method. The intervention was effective in construction of the arithmetic multiplication operation by students who did not master it, whom showed significant progress in arithmetic notions. The use of games and challenges showed that they can meet the cognitive and affective needs of the students.

Keywords: pedagogical intervention; multiplication; mathematical games.

Introdução

Considerando a perspectiva da psicologia genética, a presente pesquisa tem como objetivos: investigar o nível de compreensão e as condutas de multiplicação dos alunos de 4º ano do ensino fundamental em situação de pré e pós-teste; realizar intervenção com jogos de regras e desafios específicos para o desenvolvimento da operação de multiplicação e; verificar o nível de evolução na compreensão e nas condutas das operações de multiplicação. Na perspectiva da psicologia genética, a compreensão lógica dos conhecimentos, incluindo a operação de multiplicação e divisão, é função direta da construção de estruturas mentais. Essa construção obedece a uma sequência invariável, mas pode ocorrer em velocidades diferentes, as quais resultam da qualidade ou da frequência das solicitações provenientes dos adultos e das atividades espontâneas das próprias crianças.

Vergnaud (2009, p. 15) reconhece e atribui papel decisivo à atividade infantil sobre o processo educativo:

> Os conhecimentos que o estudante adquire devem ser construídos por ele em relação direta com as operações que é capaz de fazer sobre a realidade, com as relações que é capaz de discernir, de compor e de transformar, com os conceitos que progressivamente constrói.

Como afirma Piaget (1967, p. 11), trata-se da passagem da ação à representação. "[...] Todo o desenvolvimento da inteligência consiste em uma coordenação progressiva das ações [...]". As ações estão sempre adiantadas em relação ao pensamento, por isso é interessante começar com a prática e ressignificar com a teoria. Ou, ainda, iniciar com o jogo de regras ou com o desafio para concluir com a operação implícita.

Entretanto, essa coordenação progressiva das ações nem sempre é bem compreendida pelos educadores e gera muita confusão. Observe-se um exemplo: por desconhecer os processos de construção do conhecimento e a tomada de consciência, os professores concluem que os processos de adição e multiplicação são a mesma coisa. Se isso fosse verdade, no momento em que o estudante compreendesse a adição, a compreensão da multiplicação seria simultânea, contudo, essa compreensão pode demorar até dois anos para que de fato aconteça. De acordo com Piaget (1995, p. 31),

> [...] parece ser incontestável que a compreensão da multiplicação numérica é bem menos natural que a da adição. [...] Na adição o pensamento está centrado sobre os objetos que se reúnem a outros enquanto na multiplicação trata-se de depreender o número de vezes que se reúnem e de desmembrar, então, as operações como tais, e não mais somente seus resultados enquanto número de objetos transferidos [...].

Para Vergnaud (2011), na aprendizagem da multiplicação os alunos são levados a operações de pensamento que não se deixam reduzir a operações numéricas, mas implicam também raciocínios sobre quantidades e grandezas.

Gómez-Granell (1983) afirma que, enquanto o estudante não descobrir o papel do "operador multiplicativo", não se pode considerar que a multiplicação foi compreendida, mesmo que o estudante realize adições sucessivas dos conjuntos.

A conceitualização da multiplicação comporta mecanismos de construção ligados ao processo de abstração reflexiva, envolvendo níveis cada vez maiores de complexidade. Gómez-Granell (1983, p. 133) admite que duas aquisições sejam fundamentais para a compreensão da multiplicação:

> [...] uma é a possibilidade de o estudante constatar a presença deste "operador multiplicativo", o que lhe permitirá fazer antecipações do número "n" de conjuntos. [...] outra aquisição é a capacidade de realizar uma compensação exata entre as duas variáveis: 'n'– número de vezes ou de conjuntos e 'x' – número de elementos de cada conjunto [...].

A autora verificou como os estudantes utilizavam estratégias para resolver situações de multiplicação e de divisão. Para operar com a multiplicação, além de compreender a relação de inclusão simultânea, o estudante precisa antecipar o número de conjuntos e a compensação do número de elementos de cada conjunto, ou seja, o *operador multiplicativo*. Essa autora desenvolveu um instrumento para verificar se o estudante construiu a operação de multiplicação e divisão (operador multiplicativo), por meio de situações envolvendo problemas dessa ordem, denominado Prova da Multiplicação e da Divisão Aritmética e utilizado na presente investigação como instrumento de pré e pós-teste.

Kamii e Joseph (2008), discorrendo sobre a construção do pensamento hierárquico, analisam as relações existentes entre a estrutura aditiva e a estrutura multiplicativa dos estudantes. As autoras asseveram que o estudante consegue resolver a adição porque essa situação está inserida

Rev. bras. Estud. pedagog. (*on-line*), Brasília, v. 98, n. 248, p. 130-147, jan./abr. 2017.

num mesmo nível de abstração, ou seja, no nível de abstração da adição, ele cria unidades de um que são adicionadas o número de vezes solicitado na operação. Por exemplo, em 4x1, ele faz 1+1+1+1=4 e utiliza o total dessas unidades (4) para resolver o cálculo. Paralelamente, Kamii e Joseph (2008) recordam que, enquanto estrutura operatória de pensamento, a multiplicação depende dos níveis de abstração envolvidos e do número de relações de inclusão que o estudante faz.

A utilização de metodologia adequada no ensino da matemática nas séries iniciais pode garantir esse progresso. Os jogos e desafios parecem ser caminhos para o progresso, porque privilegiam as ações do aluno, permitem a utilização de diferentes tipos de representações das ações, incentivam a autocorreção da ação em caso de fracasso e permitem a reflexão sobre as razões do fracasso ou do sucesso – processos que permitem a tomada de consciência.

Não basta o conhecimento geral da inteligência e do comportamento da criança. Segundo Vergnaud (2009, p. 15), "[...] trata-se de um conhecimento aprofundado do conteúdo a ser ensinado e das relações desse conteúdo com a atividade possível da criança [...]". Somente um conhecimento claro das noções a ensinar pode permitir ao professor compreender as dificuldades encontradas pelo estudante e as etapas pelas quais ele passa. Ou seja, uma intervenção pedagógica, seja na construção das operações aritméticas, seja em qualquer outro conteúdo, precisa considerar todo esse processo de aquisição do conhecimento para favorecer o desenvolvimento do pensamento e a aprendizagem de conceitos.

Metodologia

Este é um estudo de natureza empírica, descrita por Campbell e Stanley (1979) como um delineamento quase experimental porque não dispõe de um controle. A descrição desse delineamento é: 01 X 02 – aplica-se um pré-teste 01 a um grupo; submete-se esse grupo a uma intervenção pedagógica X; e aplica-se, então, um pós-teste 02. 01 e 02 significam que o mesmo grupo é avaliado antes e depois do tratamento; diferenças entre 02 e 01 evidenciariam a eficácia (ou ineficácia) do tratamento X.

Nesta investigação, para o pré e o pós-teste foi utilizada a prova da operação de multiplicação de Gómez-Granell (1983), e o tratamento consiste em uma intervenção pedagógica com jogos, desafios e situações-problema.

A amostra intencional foi de 14 estudantes do 4º ano de escola municipal, sendo 10 do sexo masculino e 4 do sexo feminino, 13 com 9 anos e um com 10 anos. Todos foram indicados pelos professores como alunos que apresentavam alguma dificuldade de aprendizagem em matemática. Um dos estudantes encaminhados apresentava comprometimento neurológico, contudo, não foi recusada sua participação.

Para o pré e o pós-teste, foi utilizada a Prova da Operação de Multiplicação, de Gómez-Granell (1983), que permite verificar o nível de operação de multiplicação. Sobre uma mesa, o professor dispõe objetos, simulando uma loja. Cada objeto tem, à sua frente, um cartão com preço que varia de 1 a 9. Numa caixa, ficam várias fichas. O professor combina com o estudante que cada ficha vale um real e que o preço marcado no cartão corresponde ao preço de cada objeto. Em seguida, o estudante é solicitado a observar o preço dos objetos e convidado a brincar de comprar e vender, sendo ele o comprador e o professor, o vendedor.

São propostas duas situações para os estudantes. Primeira situação: o professor pede à criança que coloque o dinheiro necessário para comprar um objeto e, em seguida, dispõe vários objetos do mesmo tipo sobre a mesa e pede a ela que coloque o dinheiro necessário para comprá-los. Importante notar que não se enumera a quantidade de objetos. Repete-se o procedimento, variando-se os objetos e sua quantidade. Segunda situação: o professor entrega para a criança uma determinada quantidade de moedas e pergunta-lhe quantos objetos de um determinado tipo podem ser comprados com aquele dinheiro (por exemplo: quantos objetos podem ser comprados com 18 moedas). Se o estudante chegar a uma conclusão correta, ser-lhe-á proposto que pense se com as mesmas moedas poderá comprar algum outro objeto, entre os existentes na loja, de maneira que não lhe sobrem ou faltem moedas. O estudante é avisado de que todos os objetos que poderá comprar devem ser do mesmo tipo.

Para avaliar os níveis de construção da operação de multiplicação, Gómez-Granell (1983) adotou quatro condutas:

Conduta I – crianças que estabelecem correspondência termo a termo, igualando, na resposta final, o número de fichas ao de objetos que poderiam ser comprados.

Conduta II – crianças que aumentam, em algumas unidades, o resultado final, devido a uma consideração intuitiva da correspondência múltipla, não se importando ainda com a quantificação exata.

Conduta III – crianças que chegam a um resultado correto por procedimentos aditivos, mediante adições sucessivas, sem nenhuma antecipação do número de ações a fazer, chegando ao resultado final correto por meio de adições sucessivas.

Conduta IV – crianças cujos procedimentos demonstram antecipação da quantidade de fichas necessárias, sem nenhuma verificação empírica, alcançando mentalmente o resultado final.

Todos os 14 estudantes fizeram o pré e o pós-teste. Após o pré-teste, foi realizada a intervenção. O pré e pós-teste e a intervenção valeram-se do método clínico, que consiste numa intervenção sistemática do pesquisador em função do que o aluno vai dizendo ou fazendo. Constitui-se em estabelecer um diálogo utilizando situações experimentais propostas pelo pesquisador, visando explorar os raciocínios das crianças. O importante quando se trabalha com o método clínico não é obter respostas certas, mas espontâneas, que o estudante possa e queira justificar. A questão do erro é outro aspecto a ser considerado. Quando o estudante comete um erro, esse pode dizer mais sobre o pensamento do estudante do que as respostas corretas.

Para o programa de intervenção, foram selecionados jogos adaptados de Kamii e Housman (2002) e Kamii e Joseph (2008). Todos os jogos e desafios enfatizaram operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como valor posicional, base 10, antecipação e cálculo mental. A intervenção consistiu em 13 encontros semanais de uma hora e meia a duas horas de duração. O trabalho aconteceu em pequenos grupos de dois a três alunos e, em algumas situações, individualmente com a professora. Ao final da intervenção, foi realizado o pós-teste, com o mesmo instrumento do pré-teste. Os jogos e desafios escolhidos permitiram estabelecer relações e coordenações entre as ações e chegar à dedução lógica e à inferência. Os estudantes foram atendidos em horário e local designado pela escola.

Resultados e discussão

No transcorrer da intervenção, solicitava-se aos alunos que fornecessem as atitudes, a compreensão e os conhecimentos em relação às operações. O material retirado das entrevistas permitiu a análise apurada e crítica dos temas.

Na Tabela 1 estão relacionadas as condutas do pré e do pós-teste dos estudantes. Para não incorrer na identificação, optou-se por utilizar somente a letra inicial de cada nome.

Tabela 1 – Condutas de Multiplicação em Pré e Pós-Teste

			Pré-teste	Pós-teste
Alunos	Ano escolar	Idade	Conduta Multiplicação	Conduta Multiplicação
A	4º ano	9	II	III
B	4º ano	9	II	IV
C	4º ano	9	II	III
D	4º ano	9	III	IV
F	4º ano	9	II	III
G	4º ano	9	II	III
GC	4º ano	9	II	III
I	4º ano	9	II	IV
JV	4º ano	9	II	III
J	4º ano	9	II	III
K	4º ano	9	III	IV
L	4º ano	9	II	III
R	4º ano	9	II	III
VH*	4º ano	10	–	–

*Aluno com distúrbio neurológico grave.

Fonte: Elaboração própria.

Verificou-se que, do universo de estudantes que participaram da investigação, somente dois estavam na conduta III da multiplicação no pré-teste. Essa conduta corresponde às crianças que chegam a um resultado correto mediante adições sucessivas, sem nenhuma antecipação do número de ações a serem feitas. Para isso estabelecem correspondência entre os conjuntos de fichas (preço dos objetos) e cada objeto a ser comprado, chegando ao resultado final correto por meio de adições sucessivas. Na conduta II, encontravam-se 11 estudantes, que aumentavam em algumas unidades o resultado final devido a uma consideração intuitiva da correspondência múltipla, não se importando com a quantificação exata.

Esses resultados permitem dizer que no pré-teste nenhum dos estudantes possuía a ideia do "operador multiplicativo", conforme descrito por Gómez-Granell (1983); não tinham a reversibilidade de pensamento; não eram capazes de fazer compensação e antecipação; não percebiam a operação "n vezes"; não coordenavam as variáveis implícitas na multiplicação.

Após a intervenção pedagógica, verificou-se um quadro bem mais animador, como pode ser observado nos resultados do pós-teste. Os estudantes apresentaram expressivos progressos quanto à operação de multiplicação. Houve uma significativa evolução das condutas do pré ao pós-teste. Nenhum aluno no pré-teste estava na conduta IV da multiplicação. No pós-teste, nove encontravam-se na conduta III e quatro na conduta IV da multiplicação. Nenhum aluno permaneceu na conduta II.

A intervenção pedagógica

Iniciada a intervenção com os estudantes do 4º ano, verificou-se que esses tinham muita dificuldade até mesmo com a quantificação e a relação termo a termo dos elementos. Os estudantes não compreendiam a operação de adição e multiplicação, mesmo havendo conhecimento do algoritmo. Decidiu-se retomar alguns conceitos básicos, como a construção do número, cálculo mental, valor posicional e operações de adição e subtração com números de 1 a 10. Foram selecionados alguns jogos que favorecessem essas construções.

Como os jogos de tabuleiro são apreciados pelos alunos, introduziu-se o jogo Esconderijo, adaptado de Kamii e Joseph (2008), que consiste em um tabuleiro, dois dados e um peão para cada jogador. Esse jogo exige que o aluno realize adições com unidades e dezenas, cálculo mental, números sucessores e antecessores e estabeleça a relação termo a termo, na utilização dos dados. Por ser um jogo de percurso, exige também orientação espacial, para saber quando pode mudar de círculo e qual o sentido dos deslocamentos. Há ainda regras sobre perder ou ganhar jogadas e o desafio de somar as parcelas obtidas nos dados. Uma das vantagens desse jogo é permitir que os alunos contem os pontos por meio dos pontos dos dados. A maioria dos alunos dessa intervenção tinha dificuldade em contar, mesmo que diante de operações simples como 2 + 2, ou 5 + 5, ou 5 +1.

A estudante A demonstrava muita dificuldade na soma e tomava como referência os pontos dos dados para saber quantas casas deveria avançar. Mesmo ao somar (+1), precisava conferir o ponto do dado para ter certeza. Conforme Kamii e Joseph (2008), esse é um procedimento normal quando os estudantes ainda não conseguem perceber a inclusão hierárquica, que é a capacidade mental de incluir "um" em "dois", "dois" em "três", e assim sucessivamente. É como se o todo não existisse; os estudantes conseguem até pensar no todo, mas não quando estão pensando nas partes. Conforme Kamii e Joseph (2008, p. 16), "[...] para comparar o todo com a parte, o estudante tem que executar duas ações mentais ao mesmo tempo – dividir o todo em duas partes e fazer com que essas duas partes voltem a formar o todo [...]".

Quando da percepção da dificuldade dos alunos nas adições mais elementares, optou-se por primeiro inserir os jogos mais simples com numeração de 1 a 5, como o jogo Marcando os Pontos, adaptado de Kamii e Joseph (2008). Esse jogo permite fazer, por cálculo mental, operações com resultado até 5 nas mais diversas possibilidades, como: 2 + 2 + 1; 3 + 2; 4 + 1; 1 + 1 + 1 + 1 + 1. Após a partida, foi solicitado aos alunos que utilizassem o papel para registrar os pontos que somavam, ou os palitos, se quisessem conferir os pontos.

Alguns alunos tiveram dificuldades, contudo apreciaram muito o jogo e logo conseguiram fazer os cálculos necessários. Ao somar os pontos acumulados, um dos estudantes não conseguiu contar 5 pela percepção visual das bolinhas, contou com os dedos ao mesmo tempo que falava em voz alta 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, até contar todos os pontos. Outro contou 2 + 3 usando a bolinha da ficha como referência. Os estudantes não percebiam a conservação lógica. Conforme Assis (2010, p. 79), "a conservação do número não é abstraída dos objetos, pois para chegar a essa operação o estudante precisa basear o seu julgamento num raciocínio dedutivo que supõe a coordenação de suas próprias ações".

Outro jogo que explora o conceito de adição é o Zigue-Zague, adaptado de Kamii e Joseph (2008). Esse é um jogo de tabuleiro, promove a adição e a subtração e o cálculo mental de maneira ativa e divertida. Os alunos tinham muita dificuldade de chegar ao resultado e um dos estudantes, para somar os pontos dos dados 4 + 4 + 5, utilizou palitos, numa relação termo a termo entre pontos e palitos. Percebeu-se uma clara intenção em relacionar o número de palitos ao número de pontos dos dados. Quando o estudante fez a relação termo a termo, foi por meio da abstração reflexionante, para posteriormente fazer a relação um a muitos, característica da multiplicação.

O Jogo dos Palitos, além da construção da conservação, possibilita a construção da multiplicação aritmética a partir da contagem, passando pelos procedimentos aditivos e multiplicativos até sua reversibilidade completa, ou melhor, até a construção da divisão. Nesse jogo, o professor pode fazer algumas perguntas para auxiliar os estudantes, tais como: "Vocês têm certeza de que usaram o mesmo número de palitos em cada figura?", "Quantas figuras você fez? E você?", "Quem fez mais?", "Quantos palitos você usou ao todo?", "Quem usou mais palitos? Quantos mais?", "Com seus palitos você poderia fazer figuras com outras quantidades em cada uma, sem sobrar nem faltar?", "Com quantos palitos você poderia fazer cada figura?", "Quantas figuras você vai fazer com dois, três, seis?" etc.

Foi apresentada aos alunos uma quantidade de palitos, lançando-se o desafio: com esses palitos, quantas figuras diferentes você pode fazer usando a mesma quantidade, sem sobrar nem faltar palitos?

Os alunos só conseguiram fazer a operação de adição, não conseguiram perceber que o processo multiplicativo estava implícito. Perguntou-se ao aluno A:

> Pesquisadora: Quantas figuras você fez ao todo?
> A: 16 [o aluno contou nos dedos e nos palitos e por fim respondeu].
> Pesquisadora: Como fez para descobrir?
> A: Eu somei 4 + 4 + 4 + 4.
> Pesquisadora: Existe outro jeito de descobrir?
> A: Posso contar de 1 em 1 [contou todos novamente de 1 em 1 e respondeu].
> Pesquisadora: E tem outro jeito?
> A: Não.

Piaget (1995, p. 30) explica esse fenômeno:

> [...] parece incontestável que a compreensão da multiplicação numérica é bem menos natural que a da adição. Não estamos falando da aquisição escolar das tabuadas de multiplicação ou adição, mas da significação da operação multiplicativa como tal, sob suas formas mais elementares, como 3 X 2 comparado a 2 + 2 + 2.

O jogo Salve, adaptado de Kamii e Joseph (2008) e utilizado na intervenção, envolve os conceitos de adição, subtração, multiplicação e divisão. O aluno precisa considerar simultaneamente o todo e as partes e prever, a partir do todo, a "incógnita". Um aluno põe-se de frente para o outro, cada um pega um número, mas nenhum dos dois pode ver o número que pegou, somente o do colega. Ambos colocam o número na testa. Um terceiro aluno é designado como juiz e deverá falar qual o produto dos dois números e os dois participantes devem adivinhar qual o seu número, considerando o total e o número do colega que está à sua frente.

Numa situação cuja operação é 8 + 9 = 17, por exemplo, o aluno que foi designado como juiz deverá somar o total. Os alunos têm a informação do total 17, um está vendo o 8 do colega (__+ 8 = 17) e o outro o 9 (9 + __= 17) e ambos deverão fazer o cálculo do seu número que não veem. Quem responder acertadamente primeiro leva as duas cartas para si. Não é uma operação simples, pois se trata de uma equação e exige raciocínio lógico-matemático do aluno. Ele precisa conservar o todo, perceber as partes, relacionar essas partes por cálculo mental e chegar ao resultado final. São necessárias as estruturas lógicas de classificação, seriação e conservação. Nas primeiras intervenções, os estudantes não conseguiram êxito nessa atividade, somente a partir da quarta intervenção houve uma ampla aceitação do jogo com bons resultados. Os alunos conseguiam realizar as operações de adição e subtração por cálculo mental com sucesso.

É comum muitos professores dos anos iniciais acreditarem que, pelo simples fato de contarem de 1 a 10, os estudantes de 1º ano compreendem os números. Entretanto, "[...] do ponto de vista cognitivo, não é possível exigir que, sem as estruturas de classes e de ordem, alguns estudantes contem de outra forma a não ser de forma verbal [...]." (Dolle, 2011, p. 157).

Foi a partir do jogo Salve que se constatou a evolução dos estudantes que participaram da intervenção. Embora esses alunos ainda usassem os dedos como recurso, houve um significativo avanço, pois eles passaram a fazer cálculos mentais rapidamente e a utilizar a multiplicação efetivamente para calcular os pontos do jogo.

O jogo Salve possibilitou a cooperação entre os alunos porque: 1) o descobridor depende de informações que só o desafiante tem (este tem que dar a informação correta), no caso, o aluno depende da informação do Juiz; 2) considera a relação parte-todo em todas as jogadas – tanto o juiz como os dois alunos participantes têm que considerar o cálculo total e a junção das partes; 3) leva em conta a informação presente e aquilo que está ausente, no caso, o número não visível; 4) os alunos têm que considerar não apenas as jogadas efetivamente realizadas, mas também aquelas que podem fazer e que também são válidas; 5) permite ter êxito em poucas jogadas e compreender as relações em jogo; 6) permite a regulação, ou seja, modificar ou manter a conduta em função dos resultados obtidos, e a própria regularidade (o que não varia) das regras; 7) trabalha com dois conceitos: dedução e inferência. A dedução é um tipo de raciocínio cuja conclusão a que se chega depende do estabelecimento de relações entre as informações disponíveis e a inferência consiste em tirar conclusões de algumas premissas. No caso, o aluno era obrigado a considerar o número do colega, a informação do juiz e a fazer a inferência correta a partir de seus observáveis; 8) envolve conceitos de adição e multiplicação implícitos; 9) permite explorar os conceitos de classificação, seriação e conservação (ordinal e cardinal); 10) explora as estruturas de espaço, tempo e causalidade; 11) permite os processos de abstração, desde a abstração empírica, reflexionante, pseudoempírica e refletida; 12) permite a interação social e a cooperação (colocar-se no lugar do outro, pensar como o outro pensaria em situações diferentes, troca de pontos de vista...).

Os demais jogos apresentados a seguir são de natureza multiplicativa. O jogo do Buraco, de autoria de Assis (2010), permite a identificação do elemento multiplicador, conforme previsto por Gómez-Granell (1983), e também a construção da reversibilidade.

Podem participar do jogo de dois a quatro alunos, mas também podem participar apenas professor e aluno. Esse jogo corresponde a duas caixas coloridas com um furo na tampa, 60 fichas coloridas, divididas nas cores correspondentes às caixas, e uma ampulheta. Cada jogador escolhe a cor da sua caixa e de suas fichas, bem como decide quantas fichas por vez irá colocar na caixa (duas em duas, três em três, quatro em quatro etc.). Escolhe-se um terceiro jogador para ser o líder, que controlará o tempo, virando a ampulheta para começar o jogo ou contando 20 segundos. Os dois jogadores começam a colocar as fichas ao mesmo tempo, conforme o combinado ou de acordo com o número definido pelo lançamento de um dado.

Terminado o tempo, o líder pergunta aos jogadores como se determinará o ganhador. Se eles responderem que é aquele que colocou mais fichas na caixa, é preciso dizer-lhes que não é somente isso, pois é preciso também adivinhar quantas fichas cada um colocou na caixa e, para fazer isso, é preciso contá-las. Então, os jogadores decidem como realizarão a contagem: se de uma em uma, duas em duas, três em três etc. Depois de chegarem à conclusão de quem ganhou, o líder dirá que ainda terão outras rodadas e que é necessário pensar no que fazer para saber quem será o ganhador ao final das partidas. As jogadas se sucedem, mas agora os jogadores têm consciência de que terão que saber quantas fichas colocaram na caixa, o que os leva a se preocuparem não somente em encher a caixa rapidamente, mas numerarem as fichas para saber quantas estão sendo depositadas. Aumentando o grau de dificuldade, pode-se solicitar que um dos jogadores jogue três fichas e o outro cinco, e, ao final, ambos têm que acertar quanto o outro colocou na caixa.

Esse jogo só foi utilizado após os alunos alcançarem um nível de compreensão mais evoluído na adição, no cálculo mental e na rede numérica dos números de 1 a 10 chamados por Kamii e Joseph (2008) de Nível I. Essas autoras chamam os números de 1 a 10 de nível I e de 11 a 20 de nível II, afirmando que é impossível para o estudante construir o nível 2 sem uma sólida compreensão do nível I.

O jogo foi iniciado por dois alunos: C e F depositaram cinco fichas por vez, em três lançamentos (3 X 5). Então, foram levantadas as seguintes questões:

> Pesquisadora: C, você consegue adivinhar quantas fichas tem na caixa de F?
> C: 15.
> Pesquisadora: Como você fez para descobrir?
> C: Nós colocamos cinco fichas três vezes.
> Pesquisadora: E você, F, quantas você acha que tem?
> F: Tem 15 também.
> Pesquisadora: Como você sabe?
> F: Porque é 5 X 3, e 5 X 3 dá 15.
> Pesquisadora: Teria outro jeito de você descobrir?
> F: Para e conta as fichas separando em pequenos montes de cinco.
> Pesquisadora: Isso se parece com alguma coisa que você faz na escola?
> F: Sim, a conta de vezes.

Essa foi a primeira vez que os alunos começaram a compreender o princípio multiplicativo na operação. Ambos entenderam tratar-se da multiplicação, embora ainda não conseguissem explicar claramente a operação. Piaget e Szeminska (1981, p. 293), quanto à multiplicação, argumentam que:

> os estudantes começam por resolver o problema da duplicação, mas não procedem ainda por operação, isto é, por uma multiplicação abstrata e imediata: tateiam e descobrem o resultado pela própria correspondência, a qual são pouco a pouco levados a tornar múltipla.

Na próxima jogada foram quatro fichas e quatro lançamentos, ou a operação 4 X 4.

Pesquisadora: C, quanto tem no pote?
C: 16.
Pesquisadora: Por que você acha que tem 16?
C: Fiz conta de mais, contei mais 4 + 4 + 4 + 4.
Pesquisadora: Teria outro jeito de descobrir? Além de somar 4 + 4 + 4 + 4?
C: Sim, fazendo 4 X 4.
Pesquisadora: Quantas vezes ele colocou as fichas?
C: 4 vezes.
Pesquisadora: Deu quanto mesmo?
C: 16.
Pesquisadora: E você, F, tem certeza?
F: Vou conferir.

A ação permitiu aos alunos compreender o princípio multiplicativo. Quando foi solicitada a reconstituição da ação, ou seja, conferir quantas vezes foram depositadas quatro fichas, eles conferiram mentalmente, ou seja, por abstração reflexiva, o que significa que compreenderam o processo. Dorneles (1998, p. 50) reflete que:

> [...] uma aprendizagem nunca se dá no vazio: é resultado de outras aprendizagens anteriores, reintegradas e reorganizadas constantemente. O processo de reconstrução constitui, assim, a essência da generalização de um conhecimento para novas situações [...].

Na jogada posterior foi estabelecido o seguinte diálogo:

Pesquisadora: E agora, F, quantas você tem?
F: 12.
Pesquisadora: Como você fez para descobrir?
F: 4 + 4 + 4 = 12
Pesquisadora: tem outro jeito de descobrir, além de somar?
F: Somando nos dedos.
Pesquisadora: E outro jeito?
F: 3 X 4.
Pesquisadora: Tem certeza?
Pegou as fichas, separou-as em pequenos montes e disse:
F: Sim, é 12 porque é 4 + 4 + 4.
Pesquisadora: Na próxima jogada saiu o número 6 e F disse que dava 24, porque 6 + 6 + 6 + 6. Como você calculou?
F: 6 + 6 é 12, 12 + 6 é 18 e 18 + 6 é 24.
Pesquisadora: Então deu 24. Teria outro jeito?
F: Não sei.
Pesquisadora: Olha, agora a pouco C me disse que pode ser a conta de vezes. Será que é possível fazer com essa conta?
F: Só se for 4 X 6.

Mediante os contra-argumentos, o aluno conseguiu inferir a multiplicação. As mudanças de aprendizagens são um dos fatores que impedem a generalização imediata. Segundo Dorneles (1998, p. 51):

a generalização baseia-se na possibilidade de os sujeitos reproduzirem, em outro contexto, os processos que levaram à primeira aquisição. Essa generalização não é imediata, mas sim readaptada ou diferida ao contexto diferente daquele que possibilitou a criação do conhecimento inicial, utilizando sempre os esquemas anteriores e ampliando-os continuamente.

Os alunos F e V fizeram a mesma atividade com duas fichas:

Pesquisadora: Quantas fichas você acha que tem na caixa dele, V?
V: Tem 8.
Pesquisadora: Como você chegou a esse resultado?
V: Contando.
Pesquisadora: Como?
V: Pensando.
Pesquisadora: Mas como você fez para descobrir que dava 8?
V: Eu fiz de 2 em 2.
Pesquisadora: Como?
V: Sei não. Eu fiz 2 + 2 dá 4 +2 + 2 dá 8.
Pesquisadora: Tem outro jeito de fazer?
V: Não, só esse.
Pesquisadora: Um garoto de outra escola disse que coloca dois e vai contando quantas vezes ele colocou a mão na caixa. Então ele colocou a mão quatro vezes. Está certo isso?
V: Sim, porque ele contou 4 X 2 é 8 ou então 2 X 4 também dá 8.

Foi feito o mesmo procedimento com três fichas:

Pesquisadora: E agora, F, quantas fichas ele colocou?
F: 12.
Pesquisadora: Como você descobriu?
F: Contando de 3 em 3.
Pesquisadora: Existe outro jeito?
F: Tem que ir contando e colocando.
Pesquisadora: Como?
F: 3 + 3 + 3 + 3 e conta 4 X 3.

Quando ocorre tomada de consciência, é irreversível – é o fechamento do raciocínio. Trata-se da reversibilidade a que se refere Piaget e Szeminska (1981). Eles apresentam três tipos de reversibilidade que vão progredindo de um nível elementar para um mais complexo, tais como:

1. Na primeira fase, o pensamento do estudante permanece irreversível. Cada percepção constitui um momento particular do fluxo da sua experiência, sem operações que permitam compor uma por meio de outras.
2. Na segunda fase, ocorre coordenação, ainda restrita às percepções, mas se ampliam na direção do pensamento: graças à correspondência termo a termo.
3. Na terceira fase, as operações ultrapassam o campo da percepção e atingem simultaneamente a reversibilidade completa em suas composições. Nessa fase, ocorre uma passagem da percepção para a dedução, com uma coordenação progressiva das operações e a reversibilidade gradual.

O jogo Salve e o jogo do Buraco permitiram aos estudantes a construção da reversibilidade necessária para compreender a multiplicação. Quando o estudante coloca na caixa seis elementos por quatro vezes, ele realiza essa relação multiplicativa mentalmente. Processo que os estudantes começaram a fazer a partir da intervenção com os jogos, considerando que antes eles utilizavam apenas a adição.

Alguns alunos não conseguiram perceber a multiplicação e só eram capazes de inferir a igualdade baseada na simultaneidade das fichas na caixa. Conseguiam antecipar, mas sem a reversibilidade completa de pensamento. Alguns estudantes declararam saber a multiplicação, mas não compreendiam seu funcionamento. Não percebiam os números divisíveis, como é o caso do estudante F, que colocou as fichas na caixa de quatro em quatro e respondeu que havia 18 fichas no total. O estudante não percebeu que 18 não é divisível por 4. Apesar de conseguir colocar as fichas de duas em duas ou de quatro em quatro, não antecipa o resultado.

Analisou-se o caso do aluno G. Contando de quatro em quatro, foram colocadas 12 fichas.

> Pesquisadora: Quantas fichas têm na minha caixa?
> G: 12.
> Pesquisadora: Como fez para descobrir?
> G: De 4 em 4 – peguei 4, coloquei mais 4, deu 8 e mais 4 deu 12.
> Pesquisadora: E na sua caixa?
> G: Tem 12 também, porque colocamos juntos.
> Pesquisadora: Tem outra forma de descobrir, além de contar de 4 em 4?
> G: Dá para saber contando 6 e 6, vai dar 12.
> Pesquisadora: Com fichas de 5 em 5. Quantas fichas têm na minha caixa?
> G: 25.
> Pesquisadora: Como descobriu tão rápido?
> G: Eu contei 5 + 5 ... 25.
> Pesquisadora: E na sua caixa?
> G: 25 também.
> Pesquisadora: Além de contar de 5 em 5, tem outra forma?
> G: 5 X 5 porque dá 25 ou 5 X 4 que dá 20 + 5.
> Pesquisadora: Que conta é essa?
> G: Vezes.

Embora pareça mais adiantado, tendo em vista que já percebe a relação multiplicativa, não antecipa o número de vezes e percebe apenas a existência das relações counívocas.

Houve uma evolução durante a atividade, porque esse estudante percebia a multiplicação, contudo, ainda separava as fichas em agrupamentos para contar e contava todas as fichas de uma em uma, já prevendo encontrar o número proposto. Reconhecia a possibilidade de chegar ao resultado a partir do número de vezes em que depositou as fichas, compreendendo o conceito "n vezes x", porém não utilizava esse meio para chegar ao resultado. Quanto a isso, Piaget e Szeminska (1981, p. 298) argumentam que "nos diversos tipos de correspondência termo a termo, já se constatou que a equivalência por correspondência biunívoca e recíproca já é uma equivalência da ordem multiplicativa".

O jogo chamado Tigous, adaptado de Kamii e Joseph (2008), tem como objetivo realizar operações aritméticas de adição e multiplicação. É necessário um tabuleiro com os números de 1 a 12 em sequência e depois os números 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30 e 36. Pode ser jogado com dois a cinco jogadores ou duas equipes. Os jogadores dividem as fichas igualmente entre eles. O primeiro a jogar lança três dados e tem que usar os três números que saírem em quaisquer operações, para chegar a um resultado do tabuleiro e cobri-lo com uma ficha. Ganha quem terminar primeiro todas as fichas. Esse jogo permite trabalhar simultaneamente a adição e a multiplicação. Um dos alunos chegou, por fim, ao resultado 18.

> Pesquisadora: Como você chegou aos 18?
> Aluno: Porque eu fiz 9 X 2.
> Pesquisadora: Por que você contou nos dedos?
> Aluno: Eu contei 9 X 2 porque está na tabuada.
> Pesquisadora: Tem outro jeito além da tabuada?
> Aluno: Só se somar 9 + 9, vai dar 18.
> Pesquisadora: Então, quantos jeitos diferentes você pode chegar ao resultado?
> Aluno: Somando ou encontrando na tabuada.

Esse estudante foi capaz de relacionar os resultados obtidos com a tabuada anteriormente decorada, mas nesse caso o instrumento mecânico passa a ter outro significado, porque foi suscitada a compreensão do estudante. Todos os estudantes que participaram da intervenção evoluíram nas condutas de multiplicação.

Os jogos também requeriam dos alunos cálculos mais sofisticados e complexos: eles inicialmente utilizaram os dedos, mas à medida que jogavam se desvencilhavam do suporte material e recorriam ao cálculo mental. Os dados no pré e pós-teste mostraram que o programa de intervenção pedagógica foi capaz de provocar melhores condutas nas operações de multiplicação.

Considerações finais

Existe uma espécie de senso comum entre pais, estudantes e professores de que a matemática é uma disciplina difícil. Muitos alunos têm algum tipo de aversão à disciplina. Por outro lado, verifica-se que os processos de ensino-aprendizagem dessa disciplina estão baseados no treino de algoritmos, com pouca reflexão e discussão de suas regras. Dessa forma, os alunos acabam abandonando sua própria forma de pensar, fazendo uso exclusivo da memorização da regra ou fórmula, sem compreender o processo implícito. Os resultados dessa investigação nos permitem afirmar que tais métodos de ensino baseados na memorização e na reprodução mecânica não permitem um processo de aprendizagem baseado nos processos de construção do conhecimento nem a coordenação das ações mentais mediante abstração reflexionante, o que só é possível quando ocorrem ações sobre os observáveis.

Os alunos que participaram da intervenção pedagógica tiveram melhores condutas quanto à multiplicação, mesmo transcorridos menos de três meses de intervenção pedagógica.

Na perspectiva da psicologia genética, Macedo, Petty e Passos (2005), Zaia (2010), Kamii e Rabióglio (2010) e Assis (2010) são unânimes em afirmar que os jogos favorecem o desenvolvimento dos aspectos físicos, as percepções, a inteligência, a criatividade, a espontaneidade, as relações sociais, entre outros. Crianças com dificuldades de aprendizagem vão, gradativamente, modificando a imagem negativa do ato de conhecer, tendo uma experiência em que aprender é uma atividade interessante e desafiadora.

Os resultados desta investigação nos permitem comprovar a eficácia dos jogos, desafios e situações-problema nos processos de aprendizagem. Os resultados abrem o debate sobre o papel dos jogos usados no processo interventivo para a aprendizagem matemática no ensino fundamental. Os jogos, desafios e situações-problema contribuem grandemente para o aprendizado dos alunos, porém, é fundamental salientar que o desenvolvimento e a aprendizagem não estão no jogo em si, mas no que é desencadeado pelas intervenções e pelos desafios propostos aos alunos.

Na aprendizagem de qualquer conteúdo escolar e não escolar é importante considerar o papel de quem aprende. O aluno precisa formar uma compreensão do conceito, e por melhor que seja o professor ou o adulto ao explicar um conteúdo, não é possível garantir a compreensão do aluno, porque a compreensão é um ato do aluno e a explicação é um ato do professor. Não se trata da aprendizagem de novos fatos ou elementos, mas da construção única e individual daquele estudante de novos conceitos e novas compreensões.

Para Caharrer, Caharrer e Schliemann (2011, p. 19), "[...] quando ensinamos a multiplicação como adição repetida, essa experiência talvez torne mais difícil para os alunos diferenciar o raciocínio aditivo do multiplicativo". Esses autores afirmam que a diferença entre um aluno que sabe a tabuada de multiplicar até sete, por exemplo, e um que sabe todas as tabuadas de multiplicar é irrelevante do ponto de vista construtivista se ambos compreendem a relação entre adição e multiplicação.

As intervenções podem ser orais, por meio de questionamentos, solicitação de justificativas de jogadas, remontagem de um momento do jogo etc. É necessário que o educador sempre apresente novos obstáculos a serem superados com base no que o estudante já sabe, sem abandonar o aluno à sua própria sorte e sem desconsiderar sua aprendizagem espontânea.

O fato de todos os estudantes obterem êxito em condutas mais evoluídas de multiplicação quando submetidos a um processo de intervenção pedagógica ativa evidencia que é possível remediar a situação de tantos estudantes que enfrentam dificuldades de aprendizagem.

Referências bibliográficas

ASSIS, O. Z. M. *Proepre*: fundamentos teóricos. Campinas: Laboratório de Psicologia Genética da Faculdade de Educação da Unicamp, 2010.

CAMPBELL, D.; STANLEY, J. *Delineamentos experimentais e quase-experimentais de pesquisa.* Tradução de Renato Alberto T. Di Rio. São Paulo: E.P.U./Edusp, 1979.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. D. *Na vida dez, na escola zero*. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

DOLLE, J. M. *Princípios para uma Pedagogia científica*. Tradução de Sandra Loguercio. Porto Alegre: Penso, 2011.

DORNELES, B. V. *Escrita e número*: relações iniciais. Porto Alegre: Artmed, 1998.

GÓMEZ-GRANELL, C. Procesos cognitivos en aprendizaje la da multiplicación. In: MORENO, M. *La Pedagogía operatória*: un enfoque constructivista de la educación. Barcelona: Laia, 1983. p. 129-147.

KAMII, C.; HOUSMAN, L. B. *Crianças pequenas reinventam a aritmética*. Tradução de Cristina Monteiro. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.

KAMII, C.; JOSEPH, L. L. *Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética*. 2. ed. Tradução de Vinicius Figueira. Porto Alegre: Artmed, 2008.

KAMII, C.; RABIÓGLIO, M. Os efeitos nocivos do ensino precoce dos algoritmos. In: ASSIS, O. Z. M. (Org.). *Jogar e aprender matemática*. São Paulo: LP-Books, 2010. p. 39-48.

MACEDO, L.; PETTY, A. L.; PASSOS, N. C. *Os jogos e o l*údico na aprendizagem *escolar*. Porto Alegre: Artmed, 2005.

PIAGET, J. *O raciocínio da criança*. Tradução de Valerie Rumjanek Chaves. Rio de Janeiro: Record Cultural, 1967.

PIAGET, J. *Abstração reflexionante*: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Tradução de Fernando Becker. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. *A g*ênese do número na criança. Tradução de Christiano Monteiro Oiticica. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade*. Tradução de Maria Lucio Moro. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*, Curitiba, n. especial 1/2011, p. 15-27, 2011.

ZAIA, L. L. Jogar para desenvolver e construir conhecimento. In: ASSIS, O. Z. M. (Org.). *Jogar e aprender matemática*. São Paulo: LP-Books, 2010. p. 49-82.

Recebido em 28 de fevereiro de 2016.
Aprovado em 4 de novembro de 2016.