ESTUDOS **RBEP**

Processos cognitivos envolvidos no cálculo com frações

João Alberto da Silva

Resumo

O cálculo com frações é um dos conteúdos escolares mais temidos, ainda que utilizado ao longo de toda a vida escolar e em outros domínios que não o da Matemática, tais como a Física, a Química e a Biologia. A pesquisa investiga os modelos de significação elaborados por adolescentes e adultos a propósito de problemas que envolvem frações. Evidencia que apenas pequena parcela dos entrevistados é capaz de elaborar uma explicação completa para um problema que envolva cálculo com frações; os demais apresentam explicações parciais ou incorretas, baseadas na percepção e na incompreensão da relação parte/todo.

Palavras-chave: epistemologia genética; processos cognitivos; Piaget.

Abstract

Cognitive processes in the calculus of fractions

The calculus of fractions is considered one of the most scaring items of the school curriculum although it is used during the whole schooling process not only Mathematics, but also in other domains such as Physics, Chemistry and Biology. This survey investigates the signification models elaborated by teenagers and adults when solving problems involving fractions. The study showed that only a small amount of the interviewees is able to elaborate a full explanation to a problem involving the calculus of fractions. Most of them just present partial or incorrect explanations based on the perception and on the incomprehension of the relation part/ whole.

Keywords: genetics epistemology; cognitive processes; Piaget.

Introdução

Nota-se que as frações são, em geral, um dos conteúdos considerados mais difíceis na Matemática. O ensino dos números fracionários se dá por volta da 4ª ou 5ª série, período em que as crianças saem da unidocência e têm uma disciplina exclusiva de Matemática. O professor passa a ter de ensinar um conteúdo muito específico ao mesmo tempo em que lhe é exigido o cumprimento de prazos determinados. Igualmente, os métodos de memorização, repetição de um algoritmo e de "técnicas" de resolução encontram obstáculos em um dos conteúdos que exige maior grau de formalização. Essa peculiaridade no estudo das frações em relação à formalidade e à compreensão reveste-se de uma dimensão psicológica.

Para a compreensão da relação parte/todo, é necessário que se realize uma operação mental lógico-matemática que Piaget e Szeminska (1941) chamam de conservação, ou seja: antes de operar com a parte é preciso conservar o todo. Tal operação mental exige um grau de formalidade que necessita de um pensamento mais organizado, não sendo possível alcançar a compreensão real do número fracionário por meio da memorização do procedimento do cálculo ou da simples ação física sobre materiais. De acordo com Piaget e Szeminska (1941), o número é sempre produto de uma operação mental, isto é, uma construção inferencial sobre uma quantidade.

A partir da observação de alunos de cursos de licenciatura, da experiência em sala de aula, nas práticas de extensão realizadas, foi possível perceber que o mal-estar que acompanha os números fracionários estende-se para além do próprio estudo das frações, pois outros conteúdos que as envolvem são considerados mais difíceis. Desta maneira, parece interessante pesquisar quais as operações de pensamento que sujeitos adultos elaboram para a solução de problemas que envolvem frações. Como pensa um sujeito já escolarizado para realizar um cálculo com frações, isto é, como adultos acostumados a realizar cálculos com frações explicam a solução de desafios experimentais? Particularmente, a pesquisa com adultos torna mais atrativo o estudo, pois se tem a hipótese de que os mesmos sujeitos que realizam cálculos há anos e têm um relativo domínio do algoritmo e das sequências de procedimentos para resolução não compreendem efetivamente as relações parte/todo que estão em jogo nos problemas com números fracionários.

No que tange às operações mentais, o papel dos conteúdos e das significações já foi destacado por Piaget e Garcia (1987, p. 12), ao dizerem que

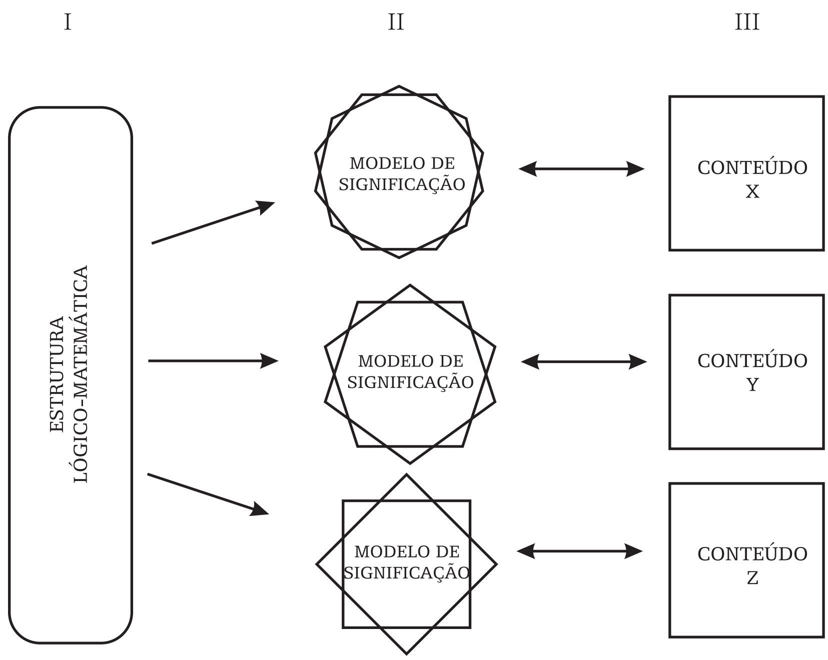
> [...] toda ação e operação comportam significações, e como nenhuma ação ou operação, nem, sobretudo nenhuma significação, permanece em um estado isolado, então cada uma delas é solidária de outras, pois existem implicações entre ações ou operações envolvendo suas significações.

Em função das particularidades de cada sujeito, as experiências individuais ante os objetos são as mais distintas, ocasionando na vida adulta diversas maneiras de compreender e assimilar os conteúdos. Assim, é possível encontrar nos adultos uma variedade bastante grande de comportamentos a respeito de problemas que são apresentados, visto que é possível encontrar distintos estados de significação e explicação das situações.

Nota-se que, no plano da estrutura, os conteúdos são estruturados pelas operações lógico-matemáticas, tal como seriar, classificar, etc., mas, quando se deparam com os problemas da realidade precisam organizar-se em função de seus significados. No caso do adulto, embora as operações lógico-matemáticas possam fazer parte de uma estrutura mais organizada, ainda é preciso construir e organizar o conjunto de significados, para se ter a possibilidade de uma dedução sobre o real e a significação de uma situação. Acreditamos que estas conexões entre as significações apresentam um caráter representativo apoiado nos instrumentos semióticos (Piaget, 1975, 1977a, 1977b), permitindo falar, então, de um quadro mental para interpretar a realidade, organizar os problemas em pensamento e atribuir significado às situações. Acreditamos que o raciocínio se desenvolve em um sistema de conjunto e se organiza sob a forma do que chamamos de modelo de significação, cuja principal função é construir um sistema antecipatório e dedutivo sobre as condutas a serem executadas.

Nesse sentido, entendemos que um modelo de significação pode ser entendido sob a perspectiva do conjunto de implicações significantes que o sujeito elabora para interpretar a realidade. Quando Piaget

(1974a, 1977b; Piaget, Garcia, 1987) introduz o conceito de implicação significante, ele o faz para exprimir a existência de uma lógica própria das ações e dos significados. De acordo com Piaget (1977b, p. 179), "o sistema das implicações significantes fornece um elemento que não é compreendido, nem nos objetivos, nem nos meios empregados: é a determinação das razões, sem as quais os sucessos representam apenas fatos sem significados". No caso do adulto, mesmo que a estrutura possa fornecer às operações suas formas de organização mais sofisticadas, tais como o grupo Inventário Nacional de Referências Culturais (INRC) e sua dupla integração das diferentes formas de reversibilidade, é necessário que se construam conexões entre significados sob a forma de modelos que atribuam sentido às situações.



I – Estrutura comum que sustenta as operações lógico-matemáticas.

II – Modelos de significação que indicam a organização das operações em função de conteúdos específicos.

III – Conteúdos com os quais o sujeito opera.

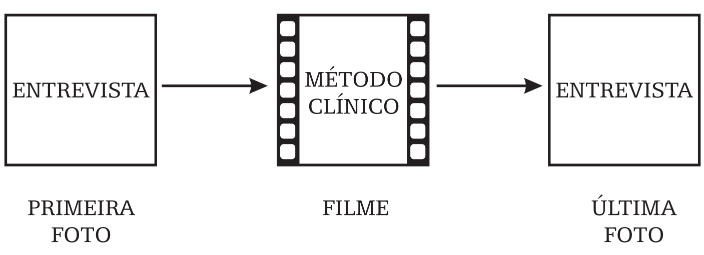
Figura 1 – Modelos de significação

A Figura 1 ilustra a dinâmica que propomos. Encontra-se uma estrutura mais ou menos geral que é responsável por organizar as operações lógico-matemáticas, isto é, a dimensão universal de um sujeito epistêmico. Além dela, existem modelos de significação que se originam da atividade operatória do sujeito particular ante os conteúdos. Os comportamentos, como já afirmaram Piaget e Inhelder (1979), continuam equivalentes sob o ponto de vista lógico-matemático, mas podem ser considerados hierarquicamente diferenciados se levarmos em conta os conteúdos e a significação sobre eles construída.

Abordagem metodológica

Esta pesquisa caracteriza-se como um estudo exploratório, experimental, descritivo e de cunho qualitativo. A orientação metodológica é inspirada nos procedimentos normalmente utilizados nas pesquisas em Epistemologia e Psicologia Genéticas. Em especial, o Método Clínico e suas variações ao longo da obra de Piaget (Vinh-Bang, 1966) é o referencial que se adota para a coleta e a análise dos dados.

Para investigar a significação e a mobilidade do pensamento do adulto, elaboramos um procedimento metodológico em três etapas. Em um primeiro momento é apresentado um cálculo sobre o assunto em questão, e se diz ao sujeito: "Resolva este cálculo como tu fazias na escola e vá me contando o que está fazendo". Em seguida é realizada uma entrevista semiestruturada. O objetivo é fazer uma "primeira foto" do modelo de significação do adulto. Essa primeira foto seria a significação que o adulto constrói de imediato diante de um problema novo. O segundo momento consiste na aplicação do Método Clínico (Piaget, 1926), por meio do qual o experimentador procura explorar o pensamento do sujeito de modo a mobilizar suas operações na construção de uma significação mais elaborada do problema. Se a entrevista semiestruturada permite a confecção de uma foto estática do pensamento, o Método Clínico permite captar o movimento e fazer um "filme" que, além de registrar a significação atribuída, é capaz de evidenciar os processos e as operações mentais envolvidos. Por último, volta-se à entrevista, com uma pequena variação em relação à situação inicial, e registra-se uma "última foto", entendida como a significação que o sujeito produz sozinho ao final da sessão. A análise dos dados se dá na evolução entre a primeira e a última foto, e as características de mobilidade do pensamento durante o Método Clínico.



Fígura 2 – Encadeamento metodológico

Não obstante, os processos de pensamento não são visíveis exclusivamente pela observação pura do comportamento, pois o sujeito pode estar em alta atividade mental sem produzir uma ação exterior. Como dizem Inhelder, Bovet e Sinclair (1974, p. 36), "ser ativo cognitivamente não se reduz [...] a uma manipulação qualquer; pode haver atividade mental sem manipulação, assim como passividade com manipulação". A expectativa é de descobrir os processos mentais elaborados pelos participantes da pesquisa na solução de problemas que envolvem os conteúdos escolares.

De acordo com Piaget (1926, p. 7), o essencial no Método Clínico consiste em não conduzir o pensamento, "mas em fazer falar livremente e em descobrir tendências espontâneas, em vez de as canalizar e as conter. Consiste em situar qualquer sintoma dentro de um contexto mental, em vez de fazer abstração do contexto". As exigências para com o experimentador são inúmeras, a reformulação das hipóteses é constante e a sagacidade tem de ser imediata.

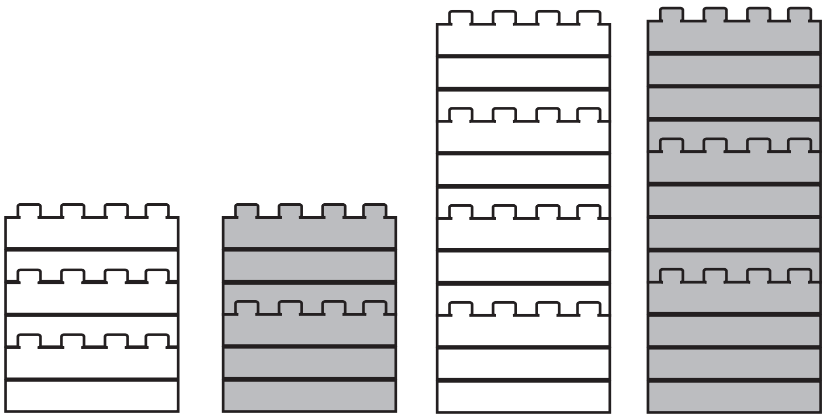
A partir da observação da manipulação do material e da descrição verbal que os participantes realizavam de suas ações, as perguntas do protocolo anteriormente elaborado foram sendo adequadas. O Método Clínico apresenta maior flexibilidade na aplicação, o que lhe atribui características, como ter um protocolo anteriormente elaborado com questões prontas, mas que podem ser reorganizadas em função das respostas dos entrevistados.

Em termos práticos, durante a etapa em que se utiliza o Método Clínico, procura-se propor situações de contrassugestão ou de conflito que permitam ao sujeito operar sobre os conteúdos de modo a evitar respostas prontas ou automáticas. Por se tratar de adultos, as perguntas podem avançar um pouco mais do que na entrevista com as crianças. A mobilidade de um pensamento mais organizado permite a elaboração de situações com conflitos maiores e de pedir explicitamente ao sujeito que explique o modo como pensa.

Participaram da pesquisa 29 sujeitos que atenderam às seguintes características: ter completado com sucesso a série escolar na qual são ensinadas as frações, terem mais de 12 anos, disponibilidade para participar do estudo e assinar o consentimento informado. As idades dos entrevistados variaram de 19 a 34 anos, não sendo esta uma variável relevante.

Descrição da técnica utilizada

Inicialmente, pede-se ao sujeito que resolva o cálculo $^1/_2 + ^1/_3$, em uma folha de papel à parte, de maneira que vá comentando como está procedendo e pensando no desenrolar da solução. Em seguida utilizam-se blocos de encaixe que permitam formar duas torres: uma de blocos amarelos com peças agrupadas duas a duas e uma de blocos vermelhos cujas peças estão agrupadas três a três, sendo que não podem ser separadas, pois estão firmemente coladas. Procede-se à entrevista perguntando se é possível construir duas torres de mesma altura utilizando em uma os blocos amarelos e noutra os blocos vermelhos. Pede-se que monte as duas torres. Em seguida, por meio da entrevista, explora-se o pensamento do sujeito em busca da explicação que elabora. Pergunta-se: que relação tem o número 6 com os conjuntos; se seria possível fazer torres mais altas e, se fosse, quantas peças seriam necessárias; que fração da torre representa um conjunto dos blocos amarelos e um dos blocos vermelhos.



Torre composta de 3 blocos de 2 peças | Torre composta de 2 blocos de 3 peças | Torre composta de 4 blocos de 3 peças | Torre composta de 3 blocos de 4 peças

Figura 3 – Ilustração do material utilizado

Numa segunda etapa utilizam-se duas torres de 12 peças, uma com blocos agrupados de 3 em 3 e outra com blocos de 4 em 4. Pergunta-se: que fração representa um conjunto de cada torre; com quantas peças as torres ficaram do mesmo tamanho e como se chegou a tal resultado; por que as torres não ficariam iguais com 10 peças; se seria possível fazer a soma de um pedaço de uma torre com um pedaço da outra torre, se sim, que se descreva o cálculo.

Análise e discussão dos dados

Primeiro modelo de significação: o esquema do número inteiro

Nessa categoria foram encontrados 12 sujeitos (com variações de idades entre 19 e 34 anos) que não conseguiram resolver um cálculo com 2 números fracionários e mostraram não compreender as relações parte/todo durante a atividade experimental; tampouco viram relação entre o cálculo e a tarefa proposta. Estes sujeitos assemelham-se àquelas crianças que sabem dizer a sequência de números como um enunciado dos nomes, mas não têm muita noção de sua quantificação.

Um caso é suficiente para ilustrar essa situação:

(PAT, 24 anos, estudante de Letras)

– Podes resolver este cálculo aqui?

– *Sim,* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$

– Tu achas que é possível montar uma torre utilizando somente essas peças vermelhas que seja igual a outra torre utilizando somente peças amarelas?
– *Acho que não.*
– Tu podes tentar montar essas duas torres?
– *Sim... Ah, deu certo.*
– Quantos conjuntos tu utilizaste de peças amarelas e quantos de peças vermelhas?
– *Três amarelas e duas vermelhas.*
– E se contássemos as peças separadas?
– *Seis.*
– Por que tu achas que as torres tornaram-se iguais quando tu utilizaste 2 conjuntos de 3 e 3 conjuntos de 2?
– *Porque é 6 que tem nas duas.*
– Tu sabes me dizer que relação tem o 6 com os conjuntos de 2 peças e os conjuntos de 3 peças?
– *Não sei... deu igual porque tu pegaste 6 de cada, se tu tivesses pegado 4 também daria* [!].
– Se nós quiséssemos fazer novamente duas torres iguais, só que mais altas, seria possível?
– *Não tem mais peças.*
– E se tivéssemos, que número de peças eu precisaria para fazer isso?
– *Mais 6, dividindo elas em 3 e 3. Não sei, a mesma coisa num e noutro, daí continuava igual.*
– Agora, vamos pegar essa torre dos amarelos [conjuntos com duas peças]. Se eu retirar um desses conjuntos da torre, qual fração representa esse pedaço da torre?
– *É 3.*
– E agora, vamos ver como fica na torre vermelha. Se eu retirar um desses conjuntos da torre, que fração da torre representa esse pedaço?
– *Fica 3 terços.*
– Como é que tu sabes?
– *Porque ficaram 3 na parte que tirou e 3 na outra parte.*

Para começarmos a compreender o pensamento de PAT é interessante analisarmos as primeiras regulações elaboradas diante do conteúdo novo. O sujeito apresenta dificuldade em fazer uma antecipação e hesita muito ao responder; não tem problema ao precisar o número de conjuntos e peças, mas não consegue justificar porque as torres têm a mesma altura. Na verdade, PAT não estabelece uma real implicação entre as seis peças e a igualdade das torres, visto que parte apenas de uma constatação e não é capaz de justificar sua afirmação. Caso o sujeito construísse uma implicação do tipo *NC*→*1* (número comum implica igualdade de tamanho), então elaboraria ou procuraria elaborar uma explicação para essa relação. Quando ele simplesmente responde "porque é 6 que tem nas duas" o faz em função da evidência dos fatos e não pela construção de uma significação dessa situação.

Ao observarmos com mais atenção, é possível identificar que a ideia de número inteiro é o que dirige as condutas do entrevistado. Desde o início, ao pedirmos que realize o cálculo no papel, o sujeito soma diretamente os numeradores e denominadores como em um cálculo de adição de número inteiro. De acordo com Piaget (1936, 1955, 1974b), a interação entre sujeito e objeto acontece em função dos esquemas e das coordenações construídos. Quando abordamos um determinado conteúdo ou problema o fazemos por meio dos esquemas ou conjunto de esquemas que temos disponíveis para assimilar a situação. Muitas vezes os esquemas não são os mais eficientes para assimilar os dados dos objetos, pois são oriundos de outras coordenações. É preciso que o sujeito exerça determinadas regulações e procure superar os problemas de adaptação que resultam em uma assimilação deformante dos conteúdos. Em resumo, o que queremos dizer é que nosso desempenho diante de um problema depende das estruturas de significação prévias que construímos. No caso de um conteúdo diferente, seu grau de novidade interfere no desempenho do sujeito, dando margem a comportamentos que lembram os das crianças.

Ao longo de nossa vida, agimos muito mais com quantidades inteiras. Isso torna mais fácil extrair das coordenações de nossas ações os elementos que permitem construir formas gerais de organização desse conteúdo. Supomos que, pelo fato de experimentarmos mais corriqueiramente problemas e circunstâncias com números inteiros, é mais provável que os sujeitos estejam menos habituados com os números fracionários. No caso deste primeiro modelo de significação, a familiaridade com os números inteiros leva o sujeito a encarar a problemática por este viés.

Para construir um esquema referente ao número fracionário é preciso que executemos atividades, que possamos refletir sobre problemas e situações que envolvem esse conteúdo. O caso de PAT demonstra que ele parece não ter se ocupado muito em pensar a respeito de situações com frações. Nessas condições, o esquema disponível para significar a situação é o que trabalha com números inteiros. Pudemos perceber isso por diversas vezes ao longo dessa primeira foto. Ao interrogarmos o sujeito a respeito da fração equivalente a um conjunto amarelo, ele nos responde simplesmente "três". Ora, é interessante observar que ele não responde com o número de peças, pois são apenas duas. Acreditamos que ele já compreende que uma fração trata de uma divisão, enquanto ao dividirmos os conjuntos encontramos 3 deles, daí o número de sua resposta. De fato, o que o sujeito nos responde não é a fração relativa ao conjunto amarelo, mas o número de elementos em que se divide a torre.

Quando passamos a interrogar PAT a respeito da torre vermelha, ele vacila em suas condutas e modifica o seu tipo de resposta. Agora o sujeito responde que um conjunto corresponde a três terços (3/3). A justificativa elaborada nos dá pistas de como ele pensa. Provavelmente o sujeito percebe que "3" não está no formato convencional de um número fracionário, com um algarismo servindo de numerador e outro de denominador. Agora ele se deixa guiar pela percepção e infere que a divisão realizada resultou em 3 peças "em cima" e outras 3 "embaixo". Desse lance perceptivo ele conclui que a fração é 3/3. Ainda que tenha mudado sua resposta e se aproximado um pouco mais do que é um número fracionário, o esquema pelo qual o sujeito significa a ideia de fração permanece ligado ao número inteiro. Quando ele diz "3 terços" refere-se às 3 peças de um conjunto sobre as 3 de outro. Para ele, uma fração é o resultado de uma divisão, mas o número fracionário em si é uma totalidade, visto que não mantém mais relação com o todo que lhe deu origem.

O sujeito apresenta duas implicações contraditórias: primeiramente a fração é dada pelo número de elementos resultantes da divisão, depois, é oriunda da relação perceptiva do número de peças. Ainda que essas duas respostas tenham diferentes elementos, percebe-se que o dado comum é a atribuição de um número inteiro à fração. A lógica interna do modelo de significação ainda não é muito forte, pois suas conexões permitem a existência de conflitos.

Podemos melhor observar a organização desse modelo no decorrer da entrevista:

> [...]
> – Vamos retomar esta torre aqui [amarela]. Teve um colega teu que disse que um conjunto dessa torre amarela era um pedaço dos 3 existentes. Tu achas que ele pode estar certo?
> – *Sim, é claro.*
> – Então ele disse que a fração era $^1/_3$. Será que ele está certo?
> – *Não, tu tens uma parte de 3, mas o que te resulta aqui são duas peças, então dá 2 o resultado da fração existente. É bem isso, porque tu tens uma fração, um pedaço do todo, e esse pedaço dá duas peças.*
> – Mas esse colega disse que achava que um conjunto da torre vermelha representa a metade da torre, será que ele está errado?
> – *Não, é metade mesmo, e metade dá 3 peças. Então essa fração da torre dá 3.*
> – Tu sabes me dizer que fração corresponde à metade?
> – *Eu acho que é* $^1/_2$.
> – Então, que fração de uma torre toda corresponde a um conjunto desses (o entrevistador pega na mão um conjunto da torre vermelha)?
> – *É 3.*
> – Mas tu não me disseste que é metade?
> – *Sim, é metade, mas a fração é 3, porque da metade eu vou tirar a fração que dá 3.*
> – Agora vamos voltar à tentativa de somar um conjunto vermelho mais um amarelo. Quanto tu achas que dá o resultado?
> – *Dá 5.*
> – Como é que tu sabes?
> – *Porque eu tenho 5 peças aqui. É só olhar e ver.*
> – E quantas partes do todo tu tens?
> – *Eu tenho 5.*
> – Quantas partes tu tens em cada torre?
> – *Tenho 6.*
> – Mas uma fração é sempre uma divisão. Tu tens $^1/_2$ ou $^1/_3$, por exemplo? Como ficam esses conjuntos?
> – *Ah...* [para e pensa]. *Assim para escrever eu não sei.*

Ao acompanhar o raciocínio de PAT, é possível evidenciar como ele se prende à ideia de totalidades inteiras. Agora as "frações" correspondentes estão mudando. Antes, um conjunto da torre amarela era equivalente a 3 (número de elementos resultantes da divisão), mas passa a ser 2 em função do número de peças. A partir de então a ideia do número de peças como o valor correspondente em fração domina o modelo de significação. Engraçado é que ele compreende que um conjunto vermelho é o equivalente à metade da torre. Igualmente, sabe dizer que a fração correspondente à metade é $^1/_2$, mas não avança daí. Diante das contrassugestões, ele não se sente desequilibrado e mantém suas inferências. As explicações que formula passam, com o desenrolar da entrevista, a ter maior coerência entre si – ainda que incorretas. Todos os valores anunciados às frações são resultantes do número de peças, de maneira que uma fração é sempre entendida como o resultado de uma divisão, mas não como uma relação entre a parte e o todo.

Veja que o conjunto de esquemas de assimilação é bastante elementar: uma fração é uma divisão, mas ainda sem consideração da relação do todo e das partes. Quando pedimos que some um conjunto mais outro, essa hipótese de número de divisões dos conjuntos não é mais possível. Tem-se uma nova totalidade, que é o conjunto amarelo sob o conjunto vermelho. A fração resultante, segundo ele, passa a ser 5, ou seja, o número de peças em que essa nova totalidade está dividida. O esquema que interpreta essa fração ainda está relacionado ao número inteiro, e o sujeito trata as frações como "produtos" de uma divisão cujo resultado é uma totalidade absoluta, sem relação parte/todo.

Na última foto, sem contrassugestões e conflitos, o sujeito reafirma seu modo de significar a situação:

[...]
– Tu podes me dizer nessa primeira torre [conjuntos de 4] que fração dela vale cada conjunto?
– *É um.*
– E nessa outra torre [conjuntos de 3], que fração representa cada conjunto da torre?
– *É um também.*
– Como é que tu sabes que é um?
– *A fração é sempre um, porque tu estás pegando sempre um pedaço.*
– E se eu tiver 2 conjuntos vermelhos?
– *Dá 2.*
– Com quantas peças as torres ficaram com o mesmo tamanho?
– *Com 12.*
– Por que 12?
– *Porque tem 12 em cada um.*
– Como é que tu sabes?
– *Porque eu contei.*
– Tu saberias me dizer por que as torres ficam iguais com 12 peças e não com 10, por exemplo?
– *Porque tu pegaste mais que 10.*
– Daria para fazer com 10?
– *Tem de pegar menos.*
– Podes fazer? [tenta, mas não consegue]. E se eu tivesse que somar esse pedaço desta torre [$^1/_4$] com um pedaço daquela torre [$1/4$] para saber o quanto de uma torre eu tenho, como eu poderia fazer? Tu consegues montar um cálculo aqui no papel para me mostrar isso?
– *Sim, 4+3 = 7.*

Nesta última foto fizemos uma pequena modificação, que consistiu em indagar o entrevistado a respeito da fração da torre referente a 2 conjuntos de 4 peças. Ele identifica que a fração é "2". Aqui a resposta não foi 8, o número de peças, mas a quantidade de conjuntos. O sujeito está preso às totalidades que surgem em função da divisão que consegue empreender, ou seja, continua a significação de que uma fração é uma divisão cujo resultado é uma totalidade absoluta.

Segundo modelo de significação: erros de agrupamento

Trata-se de sujeitos que agem sobre o problema, aparentemente, de maneira pré-operatória. No estudo empreendido foram encontrados sete casos, com idades de 19 a 30 anos, que se valem desse modelo de significação. Agem baseados na percepção e sustentados por um pensamento intuitivo que ainda não coordena e conserva operações mais complexas. Esses sujeitos julgam um bloco formado por 3 partes, correspondente à metade de uma das torres trabalhadas, equivalente a $^1/_3$ da torre e, igualmente, um bloco composto de 2 partes como $^1/_2$ da torre, embora corresponda a $^1/_3$.

Um dos sujeitos que elabora esse modelo de significação procede da seguinte maneira:

(LAR, 20 anos, estudante de História)

– Podes resolver este cálculo aqui?

– *Sim,* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3\ +\ 2}{6} = \frac{5}{6}$

– Tu achas que é possível montar uma torre utilizando somente essas peças vermelhas que seja igual à outra torre utilizando somente peças amarelas?
– *Sim.*
– Tu podes tentar montar essas duas torres?
– *Sim.*
– Quantos conjuntos tu utilizaste de peças amarelas e quantos de peças vermelhas?
– *São 3 amarelas e 2 vermelhas.*
– E se contássemos as peças separadas?
– São *6 de uma e 6 de outra.*
– Por que tu achas que as torres tornaram-se iguais quando tu utilizaste 2 conjuntos de 3 e 3 conjuntos de 2?
– *Porque 6 peças são o que formam uma torre, se tu tivesses só um desses vermelhos de 3 não seria uma torre, aí quando tu colocas mais um fica uma torre e já dão 6.*
– Tu sabes me dizer que relação tem o 6 com os conjuntos de 2 peças e os conjuntos de 3 peças?
– *É o que tu tens de ter para ter uma torre.*
– Se nós quiséssemos fazer novamente 2 torres iguais, só que mais altas, seria possível?
– *Sim.*
– Que número de peças eu precisaria para fazer isso?
– *Pelo menos o dobro. Tu tens muito pouquinhas.*

– Agora, vamos pegar essa torre dos amarelos [conjuntos com 2 peças que equivalem a $^{1}/_{3}$]. Se eu retirar um desses conjuntos da torre, qual fração representa esse pedaço da torre?
– *É* $^{1}/_{2}$.
– E agora, vamos ver como fica na torre vermelha. Se eu retirar um desses conjuntos da torre, que fração da torre representa esse pedaço?
– *É* $^{1}/_{3}$.
– Como é que tu sabes?
– *Porque tem um pedaço dividido em 3 partes.*

Pode-se observar que o sujeito apresenta maior antecipação, está mais seguro de suas respostas e se articula melhor em suas justificativas. Ainda não elabora uma explicação mais complexa a respeito da igualdade das torres com 6 peças, mas já supera, em parte, um caráter meramente descritivo. As frações ainda não estão elaboradas em função da totalidade (a torre), mas já apresentam uma relação parte/todo. Quando interrogamos a respeito da fração correspondente a um conjunto amarelo, ele nos responde $^{1}/_{2}$. Para chegar nessa resposta, a totalidade inicial é esquecida e se considera um novo todo, que é o próprio conjunto. Ao tratar o conjunto como uma nova totalidade, cada um dos seus elementos, então, corresponde a uma fração de $^{1}/_{2}$. É verdade que o sujeito ainda não conserva o todo inicial, mas evolui, em comparação ao modelo anterior, ao significar a fração como uma parte de um todo.

Conjunto formado de 2 peças, que corresponde a 1/3 de uma torre de 6 peças

Conjunto formado de 3 peças, que corresponde a 1/2 de uma torre de 6 peças

Figura 4 – Blocos particionados utilizados no experimento

Ao analisarmos o problema do ponto de vista lógico-matemático, podemos recorrer a uma estrutura de classificação para interpretá-lo melhor. Tendo uma totalidade C (a torre vermelha) dividida em dois conjuntos B_1 e B_2, cada um destes possui subdivisões, seja A_1 e A_2 para B_1 e A_3 e A_4 para B_2. Durante a entrevista perguntamos ao sujeito que fração de C corresponde B_1. Para que possa responder adequadamente é preciso que o sujeito conserve a totalidade C e, simultaneamente, considere o outro subconjunto B_2 como parte complementar para a formação do todo. Entretanto, LAR descarta esses outros elementos e passa a pensar somente a partir do conjunto B_1 sobre o qual estamos perguntando. Isso equivale a dizer que o entrevistado não conserva ainda a classe C como formada por $B_1 + B_2$ e nem B_1 como resultado de $C - B_2$. O problema não é compreender que uma fração é uma parte do todo, mas o sujeito opera com a parte sem conservar o todo e, por isso, não a relativiza, atribuindo-lhe uma dimensão nova, não mais de uma parte, mas de um "novo" todo. Assim sendo, a totalidade agora passa a ser B_1, e suas partes são A_1 e A_2. Cada um dos elementos A corresponde então a $^1/_2$ da totalidade considerada, dando margem à resposta do sujeito.

Respostas desse tipo são um tanto quanto comuns em crianças pequenas, cuja estrutura lógico-matemática é pré-operatória e que, por isso, não apresentam ainda a capacidade de classificar. Os pequenos confundem-se quando perguntamos se em um buquê com 6 margaridas e 5 rosas temos mais margaridas ou mais flores (Piaget, Szeminska, 1941). É muito difícil acreditar que adultos escolarizados não apresentem uma estrutura tão elementar quanto a classificação. A hipótese que sustentamos é que esse comportamento, aparentemente infantil, deve-se a coordenações próprias dos objetos e dos graus de novidade e de complexidade apresentados. Acreditamos que os esquemas mobilizados ainda não estão muito adaptados às exigências da situação, e o sujeito responde sem muita condição de mobilidade em seu raciocínio. No caso específico desse experimento, é preciso considerar que o material apresenta a divisão em conjuntos e em peças, o que pode dificultar o trabalho de um pensamento que não seja muito organizado. É preciso sempre voltar ao todo, ainda que se esteja pensando a respeito de uma parte. Dificilmente as frações são tratadas da maneira que propomos, e isso demanda novas coordenações diante dos problemas colocados.

Podemos observar que esse modelo de significação desencadeia regulações interessantes no decorrer da sessão:

[...]
– E se eu tivesse que somar um conjunto amarelo com um conjunto vermelho, que fração de uma torre eles representam?
– *Dá $^1/_2$ mais $^1/_3$. Vai dar mais $^1/_2$ do total das duas torres.*
– Quanto?
– *Mais $^1/_2$ do total das duas torres.*
– Como é que tu sabes disso?
– *É que essa amarela é $^1/_2$, e se eu somar mais essa vai dar... Não está certo. Dá mais que $^1/_2$.*
– E quanto dá então a soma de uma mais outra?
– *É $^1/_2$ mais $^1/_3$. Dá mais do que a metade. Dá uma torre inteira.*
– Como é que tu sabes disso?
– *Porque se eu pegar um pedaço dessa torre [a vermelha], que já é metade, e somar com outra dessa [amarela] já dá uma torre inteira, e se tu olhares bem, fica uma outra torre. É uma torre inteira ... eu acho.*
– Teve um colega teu que me disse que esse conjunto amarelo correspondia a $^1/_3$ da torre. Tu achas que ele pode estar certo?
– *Não, porque $^1/_3$ é o vermelho.*
– Mas ele me disse que era no amarelo que a torre estava dividida em 3 partes, e que pegando uma dessas partes dava $^1/_3$. Será que ele está errado?
– *Não é que ele esteja errado. Isso é verdade, mas quando eu pego um dos pedaços aí, eu tenho que olhar para ver com quantas peças ficou.*
– E se eu colocar um conjunto aqui sobre o outro e pedir para tu comparares com a torre toda que tu tinhas, o que tu podes me dizer?

– *Dá dois quintos.*
– Como é que tu chegaste a esse resultado?
– *Porque eu somei as duas partes. Tem 2 conjuntos de 5 peças.*
– Tu podes me mostrar o cálculo no papel?
– *Claro,* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$ *. É assim que resolve o problema.*

O sujeito é capaz de formular corretamente o cálculo da soma de um conjunto amarelo mais um vermelho ($^1/_2 + {}^1/_3$), mas o faz considerando cada um dos elementos ao inverso. Quando precisa chegar a um resultado dessa soma, a confusão aparece. Ele acredita primeiro que tem $^1/_2$, mas depois crê que tem mais do que isso, chegando, então, a concluir que tem uma totalidade nova e por isso uma torre inteira. Veja que ele conclui que ao somar um conjunto vermelho "que já é metade" para somar com outro amarelo, que anteriormente afirmou ser $^1/_2$, tem-se uma torre inteira. As inferências construídas confundem o próprio raciocínio, e os comportamentos oscilam em função de uma inadaptação dos esquemas ao problema. O sujeito trata a problemática ainda como se cada subtotalidade fosse um valor absoluto – como se, ao desconstruirmos o todo, ele não pudesse mais ser considerado.

Diante das contrassugestões ele mantém certa coerência entre seus julgamentos e sustenta uma explicação. Percebe-se que, ao retirarmos os dois conjuntos de suas torres de origem, o sujeito sente maior dificuldade para identificar o todo, pois as torres só podem ser reconstruídas mentalmente. Quando colocamos um conjunto amarelo sobre o vermelho, para que o sujeito diga a fração equivalente a uma torre inteira, então provocamos um possível conflito. Sugerimos que a totalidade não pode ser mais a nova torre construída, mas que precisa, necessariamente, ser comparada com a torre original. O sujeito agora se confunde mais um pouco e oscila para uma inferência baseada na percepção. Ele acredita que a nova fração corresponde a $^2/_5$ de uma torre. O numerador 2 é tirado da quantidade de conjuntos e o denominador 5 do número de peças. O esquema de assimilação empregado para o número fracionário já envolve uma relação parte/todo, mas encontra dificuldade na volta para o todo. Ora, ao dizer "dá dois quintos" ele considera uma relação parte/todo que ainda se encontra unicamente na nova torre (número de conjuntos/número de peças) sem retorno à torre de origem. Na última foto, essa característica continua a predominar:

[...]
– Tu podes me dizer nessa primeira torre [conjuntos de 4 que equivalem a $^1/_3$] que fração da torre vale cada pedaço?
– *É* $^1/_4$.
– E nessa outra torre [conjuntos de 3 que representam $^1/_4$]?
– *É* $^1/_3$.
– Com quantas peças as torres ficaram com o mesmo tamanho?
– *Com 12.*
– Por que 12?
– *Porque é a mesma coisa de peças, mas não de conjuntos.*
– Como é que tu sabes?
– *Porque está colado, não tem como fazer 12 e 12 com peças diferentes.*

– Tu saberias me dizer por que as torres ficam iguais com 12 peças e não com 10, por exemplo?
– *Porque é com o 12 que dá certo, com 10 não pode dar.*
– E se eu tivesse que somar esse pedaço desta torre [$^1/_3$] com um pedaço daquela torre [$^1/_4$], como eu poderia fazer? Tu consegues montar um cálculo aqui no papel para me mostrar isso?
– *Deixa eu ver... É só somar* [pega a caneta e escreve]*. Dá* $^2/_7$.
– E nas peças?
– *É aqui: tu tens 2 conjuntos em 7 peças.*

O sujeito hesita em suas respostas. Ora a fração é resultado do número de peças em relação ao conjunto, ora é o número de conjuntos sobre o número de peças. Interessante é que a lógica interna desse modelo de significação não permite ao sujeito perceber os conflitos entre os diferentes juízos emitidos. Os esquemas que atuam na resolução do problema provavelmente não são muito apropriados e, diante das inadaptações que surgem com a introdução do novo conteúdo, não organizam um sistema de conjunto capaz de tomar consciência das contradições. Em comum, os resultados apresentam a mesma organização ao considerar as relações parte/todo a partir do novo elemento resultante da divisão. As totalidades originais são desconsideradas, e o sujeito passa a trabalhar apenas com o novo elemento. Acreditamos que as propriedades específicas desse material corroborem para esse comportamento e indiquem dificuldades de coordenação do sujeito ante a novidade do objeto.

Terceiro modelo de significação: processos alternativos de pensamento

Aqui estão sujeitos que não realizam o cálculo por meio do algoritmo ensinado pela escola, mas, ao enfrentar os problemas da atividade experimental, desenvolvem processos alternativos de pensamento. Foram encontrados seis sujeitos (de 20, 24, 29, 29, 30 e 32 anos) que apresentam características correspondentes a esse modelo de significação. Nestes casos, o sujeito resiste ao problema proposto e o modifica. Os esquemas disponíveis para interpretar a situação não são muito adequados, mas, diferentemente dos outros modelos, o sujeito procura não utilizá-los. A alternativa, então, é mudar o problema de acordo com os esquemas disponíveis. É o que acontece com quem não compreende que metade da torre corresponde a $^1/_2$ do todo, mas que se trata de 50% do material. Igualmente, $^1/_3$ é tratado como 33,33%. O sujeito opera mentalmente em termos de porcentagem e consegue êxito na atividade experimental. Todavia, quando é perguntado se há relação entre o cálculo de frações e a atividade, é capaz de esboçar algumas relações simples, mas retorna ao modelo de significação do percentual e não consegue demonstrar qualquer cálculo com números fracionários no material. Encontram-se neste quadro, também, os sujeitos que expressam a quantia correspondente a $^1/_2$ como "tem-se a metade do todo" e $^1/_3$ como "menos da metade" ou, ainda, os que fazem representações gráficas, mas que em ambos os casos ainda não conseguem elaborar um número fracionário para representar o que dizem.

Acompanhemos um caso em suas minúcias:

(KAY, 24 anos, estudante de Pedagogia)

– Esse experimento que eu estou fazendo é para ver como os sujeitos compreendem as ideias de frações.
– *Nossa... Faz muito tempo que eu estudei isso.*
– A primeira coisa que eu vou pedir para tu fazeres é um cálculo, então. Depois nós vamos trabalhar algumas coisas aqui nos materiais para ver que comparações tu podes fazer.
– *Se eu lembrar ainda como faz...* [risos].
– Então vou pedir para tu fazeres esses cálculos aqui nesta folha e que tu possas ir me dizendo o que tu estás fazendo?
– [Para diante da folha e pensa, aparentando não saber muito o que fazer]. *Gente, eu sou tão zero à esquerda em fração... Eu sei que nós temos de colocar num denominador comum e que na verdade isso aqui* [aponta para a fração $^1/_2$] *é a metade de algo e que isto aqui* [aponta para a fração $^1/_3$] *é um terço. Se pegar uma barrinha e cortar em 3 você tem um pedacinho e aqui* [aponta para $^1/_2$] *tem um pouquinho a mais. Tem a barrinha inteira cortada na metade, um pouquinho mais de um terço.* [Para e pensa novamente sobre o cálculo]. *Na verdade, sinceramente, eu lembro que a gente deve colocar num denominador comum para depois somar os numeradores, mas matematicamente eu não conseguiria fazer. Eu pensaria em 50%. Eu pensaria em porcentagem.*
– Se tu pensares em porcentagem tu conseguirias resolver?
– *Porque aqui [$^1/_2$] daria 50%. Aqui, um terço de 100 dá mais ou menos 33,33%. Será que está certo se eu somar um mais o outro?*
– O que tu achas?
– *Pode ser que sim. Daria um pouco mais de 80%.*
– Você pode voltar a transformar 80% em fração?
– *Daria mais ou menos uns $^3/_4$. Não. Não sei.*
– Tu disseste antes que conseguirias fazer os desenhos com barrinhas. Tu consegues fazer?
– *Eu tenho de desenhar duas barrinhas iguais* [desenha um retângulo, divide em 3 partes e pinta uma delas; desenha outro retângulo, divide em 2 partes e pinta uma delas]. *Na verdade, você está pedindo para eu somar isso* [um pedaço da barra dividida em 3] *mais isso* [um pedaço da barra dividida em 2].
– Então, você não lembra, mesmo, como resolver o cálculo?
– *Não, não lembro mesmo.*

KAY não se lembra do algoritmo, mas compreende o que é uma fração. Ele procura representá-las, muito possivelmente, por meio de técnicas que aprendeu na escola, visto que o método de desenhar retângulos e dividi-los é um procedimento bastante comum em sala de aula. Além disso, o sujeito tem certas lembranças não muito organizadas a respeito do cálculo. Lembra que tem um denominador comum, mas não sabe como atingi-lo. Observa-se, ainda, que KAY sente-se desconfortável ao trabalhar com os números fracionários. Ele procura relacioná-los a outras formas de representação, tais como o desenho gráfico e a forma de percentual. Particularmente, o percentual é um modo interessante de abordar o problema, pois permite que se possa realizar um cálculo, responder de maneira relativamente correta e, ainda, operar com números inteiros.

Na verdade, o sujeito reorganiza o problema em função da sua maneira particular de ver as coisas. Os esquemas de assimilação não estão preparados para responder às necessidades do novo problema. O caráter geral da novidade dificulta a assimilação. Habilmente, o sujeito não mobiliza diretamente seus esquemas para interpretar o problema, mas faz o inverso: procura reorganizar o problema em função de seus esquemas. Mesmo que não lembre o cálculo, que evite trabalhar com frações, poderemos ver que o sujeito tem um desempenho bastante competente ao confrontar-se com o problema na continuação da sessão.

> [...]
> – Tem como a gente fazer uma torre usando esses conjuntos amarelos que seja igual a outra torre usando os conjuntos vermelhos? [Monta imediatamente]. Como é que tu sabes que são iguais?
> – *Porque na verdade eu somei os subpedacinhos.*
> – O que são os subpedacinhos?
> – *É que você falou que tinha coladas em 2 e coladas em 3.*
> – Quantos conjuntos de peças amarelas tu utilizaste?
> – *Três.*
> – E quantos conjuntos de peças vermelhas?
> – *Dois.*
> – Que fração da torre representa um conjunto desses? [retira-se um conjunto da torre vermelha].
> – *A metade, ou 50%, que é a mesma coisa.*
> – E dessa torre amarela? Que fração da torre representa um conjunto? [retira-se um conjunto da torre amarela].
> – *Tu tens 33%, menos da metade.*
> – Se eu tivesse mais peças vermelhas em conjuntos de 3 e mais peças amarelas em conjuntos de 2, seria possível fazer torres mais altas só que do mesmo tamanho?
> – *Teria. Se você tivesse esse mesmo número.*
> – Com quantas peças?
> – *Eu teria de ter 6. Nesse caso* [torre vermelha com conjuntos de 3 peças] *seriam 2 conjuntos e nesse outro* [torre amarela com conjuntos de 2 peças] *seriam 3 conjuntos. Na verdade o denominador é 6. Você vai colocando de 6 em 6 peças e só aí que você vai encontrar que os conjuntos são iguais.*
> – Tu achas que agora conseguiria fazer o cálculo? [volta para o papel e coloca o 6 como denominador comum. Para e pensa].
> – *Que ódio! Eu preciso do concreto. Porque eu lembro que não pode somar direto.*

Nota-se que o sujeito antecipa as situações e é capaz de coordenar diversos elementos em suas respostas. Ele apresenta um grau de organização bastante sofisticado em seu modelo de significação. KAY não identifica os conjuntos sob a forma de frações, mas aponta corretamente para a relação que esses conjuntos têm com o todo. Diferentemente dos modelos anteriores, esse sujeito não tem problemas em estabelecer uma relação parte/todo, mas esbarra constantemente na dificuldade de trabalhar com o número fracionário. Como compreende a situação então ele procura superar esse obstáculo reposicionando o problema, respondendo, na verdade, para uma questão diferente daquela que colocamos.

O sujeito compreende que 6 é o mínimo múltiplo comum entre os conjuntos de 2 e 3 peças. Ainda assim, mesmo identificando no material o denominador comum às duas frações, não é capaz de desenvolver o cálculo. Observe-se que o algoritmo não é condição indispensável para significar o problema. O sujeito responde corretamente a todas as perguntas e, inclusive, é capaz de somar um conjunto com o outro. Ele articula a relação parte/todo e as coordena na manipulação física. Quando começamos a contrapô-lo e a apresentar contrassugestões, ele desenvolve regulações bastante interessantes:

> [...]
> – Que fração da torre vermelha tu me disseste que é um conjunto?
> – *Olha, eu não sei dizer que fração exata, mas é a metade.*
> – E da torre amarela?
> – *É menos da metade, porque se tu comparares um conjunto vermelho com um amarelo tu podes ver que é menor. Dá 33%.*
> – E se eu tivesse que somar um conjunto amarelo com um conjunto vermelho, que fração da torre eles representam somados?
> – *Dá 83%, quase um inteiro.*
> – Em um conjunto amarelo, quantas peças eu tenho?
> – *Tens 2.*
> – Do total de quantas?
> – *De 6.*
> – E que fração é essa, então?
> – *Olha, é um conjunto dos 3 que tem, talvez fosse* $^{3}/_{2}$*, mas não tenho certeza se é assim que se escreve a fração.*
> – Teve um sujeito que disse que um conjunto amarelo corresponde a $^{1}/_{2}$ porque tu tens o conjunto dividido em duas partes. Tu achas que ele pode estar certo?
> – *Não, porque não me interessa saber aqui as divisões dos conjuntos, mas a divisão da torre, e ela está dividida em 3.*
> – E se a torre está dividida em 3, quantas partes de 3 tu tens?
> – *Uma. Dá 1 sobre 3 a fração, eu acho.*
> – E a fração de um conjunto vermelho?
> – *Pensando nessa linha de raciocínio seria 1 sobre 2, porque eu tenho um conjunto de um todo dividido em 2.*
> – E se eu tivesse que somar um conjunto amarelo com um conjunto vermelho, que fração de uma torre eles representam?
> – *Seria 5 em 2. Não, daí eu teria de mudar. Não dá mais para contar os conjuntos, teria de dizer que eu tenho 5 de 6. Isso, 5 de 6, agora eu cheguei na soma.* [Coloca um conjunto sobre o outro]. *Porque, na verdade, aqui* [pega o conjunto amarelo] *tu tens 2 peças de 6 e aqui* [pega um conjunto vermelho] *tu tens 3 de 6. Portanto, 2 de 6 mais 3 de 6 dá 5 de 6.*

Pode-se perceber que, inicialmente, o sujeito continua resistindo a trabalhar com o número fracionário, mas organiza-se bem diante das contrassugestões. Quando propomos uma afirmação incorreta (um conjunto amarelo equivalente a $^{1}/_{2}$), ele responde de imediato que isso não está certo porque o todo é sempre a torre. À medida que vamos interrogando, ele vai supondo as frações e chega mesmo a elaborar uma fórmula quando diz: "Pensando nessa linha de raciocínio seria 1 sobre 2 porque eu tenho um conjunto de um todo dividido em 2". Ora, aqui podemos especular que o sujeito está reorganizando seus esquemas em função do raciocínio que exerce no próprio momento da sessão. Ele chega a uma forma bem geral, que é conceber a fração como sendo o número de partes consideradas (um conjunto) em relação ao número total de partes existentes (2 conjuntos). Ao propormos a soma, KAY chega à resposta correta de $^5/_6$, mas mais interessante é o modo como ele chega. Na verdade, ao acompanharmos o raciocínio do sujeito, pode-se perceber que ele não soma $^1/_2$ mais $^1/_3$ e sim os múltiplos $^3/_6$ e $^2/_6$ dessas mesmas frações. Ele faz isso porque é provavelmente mais simples observar o número de peças em cada conjunto de maneira comum. Na própria construção da fala podemos observar que o sujeito não diz "$^1/_2$" ou "$^3/_6$", mas "3 de 6" ou "5 de 6". Diferente dos modelos anteriores, ele não se esquece nunca do todo como um referente, todavia ainda procura mudar a posição do problema para respondê-lo, mesmo que tenha efetuado certas regulações ao longo da entrevista e que se aproxime um pouco mais de uma explicação organizada de suas condutas. Em resumo, podemos observar a todo o momento que o sujeito está rearranjando a situação para que possa respondê-la de uma maneira que considere mais confortável.

> [...]
> – *E este 2 aqui* [aponta o denominador da fração $^1/_2$], *onde nós podemos encontrá-lo representado no material concreto? Seria essa peça?* [um dos conjuntos da torre vermelha]. *Seria essa peça do total dela?* [faz sinal com a mão para indicar toda a torre vermelha]. *E esse 1?* [aponta para o numerador da fração $^1/_2$]. *Ah não, esse 2 são essas duas peças* [indica com a mão os dois conjuntos da torre vermelha]. *Essa uma* [um dos conjuntos da torre vermelha] *é uma qualquer que eu peguei. E esse 1* [aponta para o numerador da fração $^1/_2$] *é isso que eu peguei* [um conjunto vermelho] *desse total, é uma dessas* [um dos conjuntos]. *E esse 3* [aponta para o denominador da fração $^1/_3$] *são essas três* [indica com o dedo os 3 conjuntos da torre amarela]. *E o um é a mesma coisa. É um desses* [pega um conjunto amarelo na mão].
> – E esse 6 aqui?
> – *Como a gente supõe que os tamanhos sejam iguais entre as peças, a gente precisa encontrar uma maneira que a gente divida esse tamanho em um tamanhinho que seja igual, para a gente encontrar onde se possa misturar essa peça* [pega um conjunto amarelo] *com essa* [pega um conjunto vermelho] *para poder encontrar algo que a gente possa relacionar.*
> – Você sabe como se chega nesse 6 aí no cálculo?
> – *Como nós sabemos que precisamos ter esse tamanho, seria a soma desse* [pega na mão um conjunto amarelo] *com esse* [pega na mão um conjunto vermelho].
> – E aqui no cálculo, como você chegou ao 6?
> – *É que são 6 pecinhas.*
> – Mas se não tivéssemos o material?
> – *Se não tivesse eu não iria saber.*
> – Poderia chegar ao 6?
> – *A gente iria multiplicar aqui, 2 vezes 3 dá 6. Eu cheguei a pensar em fazer isso, mas achei que estaria errado.* [Aponta para o 2 e o 3 das frações $^1/_2$ e $^1/_3$ que estão no papel].
> – Poderia fazer o cálculo agora?
> – [Para e pensa]. *Se a gente multiplicasse em cruz...* [tenta aleatoriamente descobrir o algoritmo de resolução, mas não avança].

É interessante o fato de que KAY chega mesmo à formalização do conceito de mínimo múltiplo comum, ao dizer

> *Como a gente supõe que os tamanhos sejam iguais entre as peças, a gente precisa encontrar uma maneira que a gente divida esse tamanho em um tamanhinho que seja igual, para a gente encontrar onde se possa misturar essa peça* [pega um conjunto amarelo] *com essa* [pega um conjunto vermelho] *para poder encontrar algo que a gente possa relacionar.*

Ele se mostra capaz de executar várias regulações ao longo do experimento em função dos problemas que se colocam e do raciocínio que desencadeia. Por outro lado, quando insistimos para voltar ao cálculo, KAY pode identificar o algarismo "6" como o denominador da fração da resposta, mas não sabe como chegar a ele e tampouco desenvolve o restante do cálculo. Em determinado momento quer "multiplicar em cruz", parecendo confundir suas memórias anteriores. Na última foto ele volta a encontrar resistências para trabalhar com o número fracionário.

> [...]
> – Nessa primeira torre, tu tens os conjuntos colados com 4 peças. Quantos conjuntos tu tens?
> – *Eu tenho 3 conjuntos e 12 peças.*
> – Nessa torre amarela os conjuntos são de 3 peças. Quantos conjuntos tu tens?
> – *Tenho 4 conjuntos de 3 peças cada um, 12 peças no total.*
> – Aqui na torre amarela, cada conjunto representa que fração da torre?
> – *Cada conjunto é um de 4, dá 3 sobre 12 a fração.*
> – E na outra torre?
> – *Dá 4 sobre 12.*
> – Se nós quisermos somar um conjunto dessa torre [aponta-se a torre amarela] com um conjunto daquela torre [aponta-se para a outra torre], que fração de uma torre toda nós teríamos?
> – *Dá 7 sobre 12.* [Imediatamente pega as torres. Deita-as sobre a mesa. Separa um conjunto de cada torre e os une. Conta com a ponta do dedo e proclama o resultado].
> – Tu conseguiste me dizer que dá 7 sobre 12, mas tu conseguirias montar um cálculo para demonstrar isso?
> – *Não.* [Sorri e demonstra inquietude].

A última foto mostra estabilidade no modelo de significação de KAY. Ele opera sobre o material, mas não consegue elaborar um cálculo no papel. Pode-se destacar que o cálculo por meio do algoritmo provém de um procedimento automatizado cuja fonte está, principalmente, na memória. No caso de KAY essa lembrança não está mais presente, mas isso não impede que se adapte para resolver a situação. Astutamente o sujeito reorganiza o problema e o coloca sob outra perspectiva. A principal característica desse modelo de significação é esta: os problemas são ajustados aos esquemas disponíveis para interpretá-lo. O grau de novidade causa estranheza à capacidade do sujeito de significar o problema. Existe um desajuste entre seus esquemas disponíveis e aqueles que são necessários para assimilar a situação. Na verdade KAY não resolve a prova que propomos, pois o que apresenta é a solução para outra questão que ele mesmo articulou. A dificuldade em trabalhar com o número fracionário foi burlada mediante a elaboração de uma nova forma de pensar o problema.

Quarto modelo de significação: adaptação ao problema

São em menor número os sujeitos que aqui se enquadram, pois se trata de um modelo de significação sofisticado: foram encontrados quatro participantes (de 19, 20, 25 e 32 anos) que apresentam as características de compreensão da relação parte/todo, da formalização da fração e dos procedimentos de cálculo. O sujeito tem êxito na resolução do cálculo e, mesmo empregando o algoritmo, já é capaz de comentar o cálculo que está realizando. Na atividade experimental demonstra desenvoltura e compreensão dos problemas propostos – formula hipóteses e apresenta explicações para o que se passa. Na comparação entre o cálculo e o problema demonstra-se surpreso com a pergunta e afirma não ver qualquer diferença, pois as duas situações "são a mesma coisa". Além disso, é capaz de identificar o procedimento realizado para a solução do cálculo no material concreto.

Uma situação é suficiente para ilustrar este modelo:

(PRI, estudante de Física, 20 anos – resolve o cálculo pelo algoritmo)

– Tem como a gente fazer uma torre usando esses conjuntos amarelos que seja igual a outra torre usando os conjuntos vermelhos?
– *Sim.*
– Tu podes montar para mim? [Pega 3 conjuntos amarelos e 2 vermelhos]. Quantos conjuntos de peças amarelas tu utilizaste?
– *Três.*
– E quantos conjuntos de peças vermelhas?
– *Dois.*
– Que fração da torre representa um conjunto desses? [Retira-se um conjunto da torre vermelha].
– *A metade.*
– E dessa torre amarela? [Retira-se um conjunto da torre amarela].
– *Um terço.*
– E se eu tivesse que somar um conjunto amarelo com um conjunto vermelho, que fração de uma torre eles representariam?
– *Não sei se dá para resolver sem o cálculo.*
– Como tu poderias pensar para resolver e me dizer o resultado sem elaborar o cálculo?
– *Olha, eu teria aqui que ver. São 5 peças* [para e pensa]. *É, são 5 peças de 6, dá* $^5/_6$ *, porque, se tu olhares, uma torre inteira são 6 peças, e aqui* [pega na mão os conjuntos amarelo e vermelho] *tu tens 5. É* $^5/_6$ *.*
– Tu consegues montar um cálculo para resolver isso?
– *Claro, é o mesmo de antes.*
– E esse 2 aqui [aponta-se o denominador da fração $^1/_2$], onde nós podemos encontrá-lo representado no material concreto?
– *É essa divisão em 2 conjuntos da torre vermelha.*
– E esse 3? [Aponta-se para o denominador da fração $^1/_3$].
– *É a divisão da torre amarela.*
– E o 6? [Aponta-se para o denominador da fração $^5/_6$].
– *É o número de peças que dá certo para as torres ficarem iguais.*
– E o 5? [Aponta-se para o numerador da fração $^5/_6$].
– *É o número aqui dos dois conjuntos que tu pediste para somar.*

Neste exemplo, o sujeito parece coordenar muito bem suas ações e delas retira os dados para seu juízo. Possui uma grande mobilidade do pensamento e dele depreende as razões que explicam os problemas. Ele parece hesitar para responder com o resultado da soma dos conjuntos, em face da nova relação que tem de ser estabelecida. Ao responder sobre as frações referentes aos conjuntos, considerava-os como subtotalidades da torre, mas quando perguntamos sobre a soma de um conjunto com o outro foi capaz de avaliar o número de peças sem perder a torre como a totalidade relacionada. Aparentemente, o sujeito possui esquemas suficientemente organizados para interpretar o problema. Diante da novidade, é capaz de responder muito rapidamente aos desafios surgidos pelo uso dos materiais. Pode-se perceber sua capacidade de organização e regulação no restante da sessão:

[...]
– Agora vou te mostrar essas duas torres [já montadas com 12 peças em conjuntos de 3 e de 4]. Nessa primeira torre, tu tens os conjuntos colados com 4 peças. Quantos conjuntos tu tens?
– *Três.*
– Nessa torre amarela os conjuntos são de 3 peças. Quantos conjuntos tu tens?
– *Quatro.*
– Aqui na torre amarela, cada conjunto representa que fração da torre?
– *Representa* $^1/_4$.
– E na outra torre?
– *Representa* $^1/_3$.
– Teve um colega teu que achou que um conjunto desses [de 4 peças] era $^1/_4$. Tu achas que ele pode estar certo?
– *Não, porque daí teria que ter mais um conjunto, e são só 3.*
– Se nós quisermos somar um conjunto dessa torre [aponta-se a torre amarela] com um conjunto daquela torre [aponta-se para a outra torre], que fração de uma torre toda nós teríamos?
– *Pois é, eu teria que somar* $^1/_3$ *mais* $^1/_4$. *Dá* $^7/_{12}$.
– Como é que tu sabes?
– *Porque eu tenho nesses dois conjuntos 7 peças comparadas com as 12 da torre inteira.*
– Tu podes montar um cálculo. [Pega o papel e monta o cálculo].
– *Claro, dá os* $^7/_{12}$.
– Onde tem esse 7 [aponta-se para o numerador da fração $^7/_{12}$] nos materiais?
– *Acho que é se somar essas peças de 3 e 4.*
– E o 12?
– *É nas torres. É o número comum.*

No decorrer da sessão o sujeito mantém suas condutas anteriores sobre o problema, uma vez que não encontra qualquer dificuldade para interpretá-lo. A lógica interna do modelo garante determinada segurança nas respostas, uma vez que as inferências realizadas estão pautadas em justificativas que formam um conjunto explicativo da situação. Os movimentos sobre os materiais apenas ratificam essas inferências prévias, fornecendo *feedbacks* positivos aos juízos construídos. O sujeito estabelece relações e responde corretamente às contrassugestões, apresenta maior mobilidade de pensamento e não se sente em contradição ou hesitante ao responder.

As frações e a significação

Para a construção de uma relação entre partes e um todo é imprescindível a presença de um pensamento mais ou menos organizado. Este pensamento se constitui à medida que os sujeitos passam por experiências lógico-matemáticas[1] que promovam ação mental sobre as situações. Parece, no que tange aos números fracionários, que as experiências anteriores dos sujeitos entrevistados estão mais ligadas às memórias e às experiências físicas relacionadas aos sentidos, tais como ver, ouvir e tocar.

Nota-se que, para a solução dos cálculos habitualmente propostos na escola, é preciso saber uma sequência de procedimentos automatizados chamada de algoritmo. Os algoritmos permitem que os sujeitos manipulem algarismos sem a necessidade de uma compreensão das operações que realizam. Para efetuar tais sequências de procedimentos, o pré-requisito é a memória, visto que se torna possível realizar um cálculo sem construir uma significação das operações efetuadas. O sujeito memoriza uma lei, no sentido de uma regularidade de ações, pela qual pode chegar aos resultados. Contudo, essa aplicação da lei não exige a presença de um pensamento em ação, o que se desdobra em um modelo de significação inexistente ou parcialmente elaborado que pode perdurar durante a vida adulta.

No experimento proposto, muitas vezes os sujeitos possuem as operações lógico-matemáticas (reversibilidade, correlação, negação, etc.) para chegar a um resultado, mas mesmo assim fracassam. Em tese, eles não obtêm êxito na solução porque o pensamento precisa organizar também significações sobre o problema; o raciocínio precisa dedicar-se àquele conteúdo específico. De acordo com Piaget e Inhelder (1979, p. 177, tradução nossa), "toda significação provém, de fato, da atribuição de um esquema a um objeto ou a um evento qualquer, mas todo esquema resulta, por outro lado, de uma construção, a qual consiste naturalmente em ações." Muitas vezes os esquemas disponíveis não são os mais recomendados para atribuir significado à situação. Em função disso, ocorre uma série de problemas que lembram a ausência das operações lógico-matemáticas e, aparentemente, indicariam que adultos podem regredir a estruturas infantis. Alguns sujeitos referiam-se às frações sempre em termos de números inteiros; outros se confundiam com o todo; outros, ainda, procuravam evitar o problema e o abordavam em outra perspectiva. Supomos que isso se deve às inadaptações de seus esquemas de ação diante do conteúdo específico. Não se trata da ausência de operações lógico-matemáticas ou de regressão estrutural,[2] mas da necessidade de uma nova organização dos esquemas em face do conteúdo.

No caso da prova proposta, encontramos quatro diferentes modelos de significação da situação. O Quadro 1 ilustra as condutas observadas:

[1] Para Piaget (1970), as experiências lógico-matemáticas referem-se às situações em que há atividade operatória do pensamento, diferindo das experiências físicas, baseadas em elementos ligados aos sentidos e à percepção. Enquanto as experiências físicas retiram seus dados das características aparentes dos objetos, as experiências lógico-matemáticas abstraem dados das coordenações das ações.

[2] É evidente que acreditamos na existência de sujeitos adultos que não tenham atingido o pensamento formal. Todavia, no caso dos entrevistados, diversas condutas demonstram um pensamento que é, no mínimo, operatório, ainda que apresente variações que julgamos ser influência dos conteúdos.

Quadro 1 – Resumo das condutas para a prova de frações

Modelo de significação	Condutas
Esquema do número inteiro	Significação pelo número inteiro Fração entendida como uma divisão Coexistência de duas implicações conflitantes Ausência de relação entre a parte e o todo Domínio da percepção
Erros de agrupamento	Domínio da percepção Ausência de conservação do todo Ausência de classificação organizada Significação de uma relação parte/todo
Processos alternativos de pensamento	Significação de uma relação parte/todo Reorganização do problema Estabelecimento de relações com outros conteúdos Êxito na atividade experimental
Adaptação ao problema	Êxito na atividade experimental Estabelece relações com o algoritmo Conservação e classificação organizadas Justificativas para todas as condutas

Nossa hipótese é de que, além da estrutura lógico-matemática que sustenta as operações em uma dimensão universal, há uma organização inerente às significações em contextos específicos. A estrutura lógico--matemática evidencia as características universais dos seres humanos, mas acreditamos na existência de uma organização que é construída em função das experiências particulares. Essa estrutura das significações envolve os esquemas de ação que construímos ao longo de nossa vida. Eles podem se organizar sob formas de sistemas (modelos) que procuram interpretar os problemas em função da significação que lhes atribuem. Cada vez que nos deparamos com diferentes conteúdos, precisamos, inicialmente, mobilizar os esquemas existentes e utilizá-los para interpretar a situação, adaptarmo-nos à novidade e construir novas significações. Ora, as formas desses esquemas, mesmo que gerais, ainda estão presas aos conteúdos. Temos esquemas ou conjuntos de esquemas para agarrar, puxar, nadar, correr, comer e realizar diferentes tarefas. Cada situação apresenta uma novidade e uma complexidade que exige adaptação. Dependendo do grau da novidade e da complexidade, os esquemas não apresentam uma adaptação imediata; isso dá margem à construção de diferentes modelos de significação, visto que podemos abordar os problemas de diversas maneiras em função das construções particulares dos esquemas.

É evidente que a estrutura de significação que propomos está em constante interação com a organização das operações lógico-matemáticas.

Na verdade, não se trata de duas estruturas distintas, mas de diferentes aspectos da mesma organização que sustenta o pensamento. De um lado, precisamos considerar as operações lógico-matemáticas que dinamizam as formas de abordar os problemas e os desafios; de outro, temos a organização sobre os conteúdos específicos e os diversos modos de significar as situações.

Aparentemente, alguns dos comportamentos dos entrevistados lembram condutas pré-operatórias e, até mesmo, alguns traços sensório--motores. Entretanto, podemos observar que, à medida que se debruçavam sobre a prova, os participantes enfrentavam contrassugestões e conflitos, abordavam o problema de maneira muito diferente dos pequenos. As sessões revelam que as dificuldades ante o experimento provinham de complicações devidas ao conteúdo específico. As características do assunto, dos objetos utilizados e das perguntas propostas complicavam a situação. Os modelos de significação representam a organização dos esquemas envolvidos na solução da tarefa. Ora, se as operações lógico-matemáticas influenciam e são influenciadas pelas significações construídas, nos parece notório que se trata da mesma organização em diferentes facetas. O que gostaríamos de destacar é que, se por um lado as operações lógico-matemáticas possuem uma lógica operatória já estudada por diversas vezes (Piaget, 1936, 1955; Piaget, Szeminska, 1941,), existe também uma lógica das significações própria dos modelos que o sujeito constrói para interpretar a realidade. Mostrar os desdobramentos desse caso particular da lógica é o que nos propomos neste estudo.

Referências bibliográficas[3]

INHELDER, Barbel; BOVET, Magali; SINCLAIR, Hermine. *Aprendizagem e estruturas do conhecimento.* São Paulo: Saraiva, [1974] 1977.

PIAGET, Jean. *A representação do mundo na criança.* Rio de Janeiro: Record, [1926] [s.d.].

________. *O nascimento da inteligência na criança.* Rio de Janeiro: Zahar, [1936] 1978.

________. *Da lógica da criança à lógica do adolescente.* São Paulo: Pioneira, [1955] 1976.

________. *A tomada de consciência.* São Paulo: Edusp, [1974a] 1975.

________. *Fazer e compreender.* São Paulo: Melhoramentos, [1974b] 1977.

________. *A equilibração das estruturas cognitivas:* problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar, [1975] 1976.

[3] Entre colchetes está o ano em que foi publicada a primeira edição da obra.

PIAGET, Jean. *Abstração reflexionante*. Porto Alegre: Artmed, [1977a] 1990.

________. Essai sur la necessité. *Archives de Psychologie*, Genève, v. 45, n. 175, p. 235-251, 1977b.

PIAGET, Jean; GARCIA, R. *Hacia una logica de significaciones*. Barcelona: Gedisa, [1987] 1989.

PIAGET, Jean; INHELDER, B. Procédures et structures. *Archives de Psychologie,* Genève, v. 47, n. 18, p. 165-175, 1979.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, A. *A gênese do número na criança*. Rio de Janeiro: Zahar, [1941] 1983.

VINH-BANG. El método clínico y la investigación en psicología del niño. In: AJURIAGUERRA, J. *Psicología y epistemologia genética.* Buenos Aires: Proteo, 1970. p. 39-51.

João Alberto da Silva, doutor em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), com estágio na Universidade de Genebra, é professor na Universidade Federal de Pelotas (UFPel).

joao.alberto@ufrgs.br

Recebido em 9 de junho de 2009.

Aprovado em 16 de setembro de 2010.