APRENDER A VER E A MANIPULAR O OBJETO GEOMÉTRICO ALÉM DO TRAÇADO NO CABRI-GÉOMÈTRE

Colette Laborde e
Bernard Capponi*

A Didática da Matemática dedicou uma parte importante de seus trabalhos ao estudo das situações-problema nas quais o aluno deve construir ferramentas de solução (que apresentem para ele um aspecto de novidade) para resolver o problema que lhe é apresentado. A teorização proposta por Brousseau (1986) descreve essas situações como as de uma interação entre um meio e o aluno. Em termos de sistema, se o sistema didático c aquele construído em torno do triângulo professor, saber, alunos, o meio encontra-se no interior desse sistema como o subsistema antagonista do aluno. É por ações sobre o meio, pela interpretação de retroações do meio suscetíveis de fornecerem elementos de validação de sua solução (Margolinas, 1993, cap. 1 e 2), na repetição de tentativas de resolução de um mesmo problema, que o aluno elabora adaptações novas à situação que o problema lhe apresenta. Essa adaptação pode ser a fonte de novos conhecimentos. Uma hipótese importante em didática postula que o meio deve ser organizado de forma a permitir tais adaptações do aluno.

Os Ambientes Interativos de Aprendizagem com Computador (Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur — EIAO) podem servir à constituição de ambientes organizados visando à aprendizagem e serem analisados a partir desse ponto de vista. Com efeito, eles oferecem, de forma particular, uma possibilidade de confrontação longa e repetida com uma situação-problema e uma dualidade de ação e *áefeedbacks* do dispositivo para as produções dos alunos, como foi confirmado por um grande número de observações de alunos trabalhando no computador (Gras, 1987; Artigue, 1991; Bellemain, Capponi, 1992). As especificidades do EIAO decorrem, em particular, dos seguintes fatos:

— um EIAO contém conhecimentos (matemáticos, neste caso);

— esses conhecimentos, em função de limitações de representações em máquina e na interface, podem ter um funcionamento peculiar, diferente em certos aspectos daquele dos conhecimentos de referência;
A primeira especificidade implica particularmente que:

— ações conceitualmente complexas podem se tornar possíveis diretamente ao utilizador do dispositivo;

— a máquina é suscetível de oferecer retroações fundamentadas em conhecimentos;

— a máquina tem um comportamento em parte independente do aluno.

O objetivo deste artigo é a análise das especificidades de um EIAO e seu papel sobre a concepção e o funcionamento de situações adidáticas. O exemplo escolhido é o *software* Cabri-Géomètre, uma vez que constitui um meio organizado para o aprendizado da noção de figura geométrica. Esse aprendizado é, com efeito, um ponto-chave do aprendizado da Geometria no colégio[1], conforme tentaremos mostrar a seguir. Apresentaremos depois o *software* e dedicaremos o resto do artigo ao estudo do meio adidático suscetível de ser organizado em torno do *software* e ao caráter adidático de situações que envolvam as relações entre desenho e objeto geométrico.

" DidaTech — LSD2 IMAG-CNRS, Universidade Joseph Fourier.

[1] Correspondente, no Brasil, ao antigo ginásio (N.Trad.).

As relações entre desenho e objeto geométrico

A Geometria ensinada trata de objetos teóricos, mas envolve também representações gráficas cujo papel no aprendizado da Geometria não precisa mais ser enfatizado.

Afigura vista como relação entre desenho e objeto geométrico

Como entidade material sobre um suporte, o desenho pode ser considerado um "significante" de um referencial teórico (objeto de uma teoria geométrica como a da Geometria euclidiana ou da Geometria de projeções). A figura geométrica consiste no emparelhamento de um referencial dado com todos os seus desenhos; é então definida como o conjunto dos pares formados de dois termos, sendo o primeiro o referencial **e o** segundo um dos desenhos que o representa; o segundo termo é tomado do universo de todos os desenhos possíveis do referencial. O termo figura geométrica visto nesta acepção leva ao estabelecimento de uma relação entre um objeto geométrico e suas possíveis representações. Dentro desta abordagem, as relações entre um desenho e seu referencial elaboradas por um sujeito, leitor ou produtor do desenho, constituem para esse sujeito **o** "significado" associado da figura geométrica. Esse significado corresponde ao que Fishbein (1993) chama de *figurai concept.*

As relações entre desenho **e** objeto geométrico podem ser caracterizadas, *grosso modo,* pelo fato de que as propriedades do objeto geométrico se traduzem graficamente por relações espaciais. Por exemplo, um traço retilínco que toca um traçado circular pode ser interpretado em uma teoria geométrica como uma rela tangente a uma circunferência. Contudo. é importante ressaltar a complexidade das relações entre desenho e objeto geométrico; com efeito, a passagem do desenho para o objeto geométrico é objeto de uma interpretação de um ser humano. Disso decorre que:

— de um lado, um desenho geométrico não é necessariamente interpretado por seu leitor como correspondente a um objeto geométrico;

— de outro lado, as interpretações de um mesmo desenho como significante de um objeto geométrico são múltiplas por duas razões: a primeira decorre de que as interpretações dependem do leitor e de seus conhecimentos bem como do contexto; a segunda decorre da própria natureza do desenho; sozinho, ele não pode caracterizar um objeto geométrico.

Esclareceremos essas informações que servem de pontos de partida ao nosso quadro teórico.

Um desenho conduz aos objetos teóricos da Geometria na medida cm que aquele que o lê decide fazê-lo.

A interpretação depende, evidentemente, da teoria com a qual o leitor decide ler o desenho bem como dos conhecimentos desse leitor. O contexto desempenha um papel fundamental na escolha do tipo de interpretação. Desta forma, a Figura 1 pode ser interpretada como o desenho de uma maçã sobre a qual vem grudado um pedaço de madeira. Em um contexto matemático, um matemático sem dúvida alguma reconhecerá uma circunferência. Mas ele será mais hesitante em fazê-lo para o desenho da direita (Figura 2), apesar do conjunto das marcas de tinta sobre o papel do desenho da direita ser provavelmente uma aproximação melhor dos mínimos quadrados de um círculo.

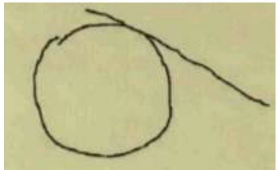

Fig. 1

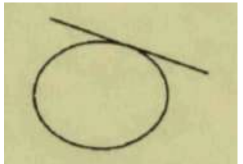

Fig. 2

Esse comportamento pode ser explicado se considerarmos a escolha do tipo de interpretação do leitor. O matemático, em seu contexto de trabalho, considera esses desenhos sob uma interpretação totalmente geométrica e, uma vez que nessa interpretação os desenhos devem conduzir a objetos definidos a partir da teoria, levando em consideração o traçado a mão livre, ele se esforçará para ver uma circunferência no primeiro, ao passo que hesitará entre uma elipse e uma circunferência no segundo, considerada a aparente exatidão do traçado.

Um desenho, mesmo geométrico, pode ser interpretado de múltiplas maneiras e a percepção, em especial, interfere na elaboração de uma interpretação quando o leitor não possui conhecimentos teóricos profundos de Geometria que lhe permitam ultrapassar a primeira leitura perceptiva Pudemos desta forma mostrar que os aspectos perceptivos (Duval, 1988; Mesquita, 1989; Padilla, 1990) do desenho podem atrapalhar ou, ao contrário, favorecer a leitura geométrica por alunos do colégio, chamando a atenção para os elementos do desenho não pertinentes para essa leitura. Assim, a configuração de Thales (Cordier, Cordier, 1991) não é identificada pelos alunos da 3ª série[2] nos dois desenhos da Figura 3.

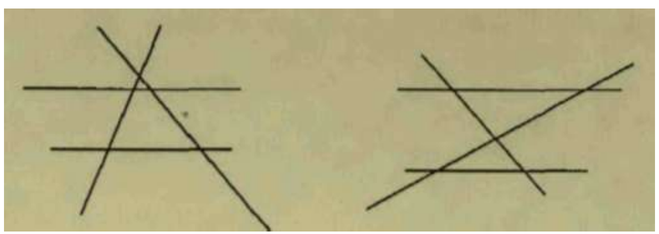

Fig. 3

Desenhos prototípicos de objetos geométricos (Noirfalise, 1991) constituíram-se ao longo do tempo, resultantes de influências ao mesmo tempo perceptivas e culturais (em sentido amplo e escolar). Alguns são bem conhecidos (quadrado/losango), outros menos, como o do Paralelogramo: o desenho prototípico de um Paralelogramo é, ao menos na França, aquele em que a diagonal AC é perpendicular ao lado AD (Figura 4); pudemos justamente identificar esse caso de tipicalidade utilizando o Cabri-Géomètre.

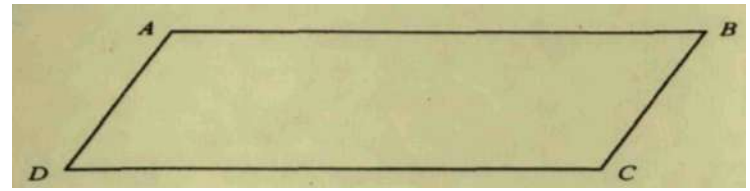

Fig. 4

Visto como significante de um objeto geométrico, o desenho revela propriedades desse objeto, mas o faz apenas parcialmente. Podemos associar ao desenho um *domínio de funcionamento* (conjunto das propriedades geométricas representadas por algumas das propriedades espaciais do desenho). Desta forma, um desenho não traduz o domínio de variação dos elementos do objeto geométrico. A partir de um desenho, é impossível inferir se um ponto de segmento pertence somente ao segmento ou à reta base do segmento, se duas circunferências secantes o são por hipótese ou se podem estar em uma posição relativa qualquer. *É necessária uma descrição discursiva que caracterize o objeto geométrico* para eliminar as ambigüidades inerentes ao desenho (Duval, 1988; Parzysz, 1988).

Inversamente, nem todas as propriedades espaciais do desenho podem ser interpretadas como correspondentes a propriedades do objeto; ao desenho corresponde um domínio de interpretação. A posição do desenho na folha de papel, por exemplo, está fora do *domínio de interpretação* dos desenhos tidos como significantes de objetos da Geometria euclidiana.

[2] Corresponde, no Brasil, à 8ª série do 1º grau (N.Trad.).

Alguns dos problemas encontrados pelos alunos ocorrem justamente por eles funcionarem com um domínio de interpretação diferente daquele da Geometria euclidiana.

As relações entre desenho e objeto geométrico no ensino da Geometria

O ensino da Geometria ignora as relações entre objeto geométrico e desenho, silenciando sobre a distinção entre os dois ou agindo como se um elo natural os unisse. Gostaríamos de retomar a tese defendida por Berthelot e Salin (1992) e o quadro teórico correspondente desenvolvido sobre as relações entre conhecimentos espaciais e conhecimentos geométricos: o aniquilamento dos conhecimentos espaciais cm favor dos conhecimentos geométricos resulta no apoio descontrolado da Geometria ensinada sobre uma relação privilegiada com o espaço reservado ao tratamento de pequenos objetos ou de traçados realizáveis sobre uma folha de papel, sobre a evidência perceptiva: "vemos claramente que..." (Bessot, 1993). Interpretamos o descaso pelo ensino dessas relações entre desenho e objeto geométrico com relação a esse aniquilamento: o ensino negligencia a possibilidade de uma leitura espacial do desenho e considera unicamente sua leitura geométrica; ele desconhece a existência do domínio de interpretação de um desenho: a evidência perceptiva é natural e imediatamente interpretada em termos geométricos. É preciso dizer que a linguagem favorece essa confusão espacial-geométrica; é freqüente o mesmo termo designar a propriedade espacial e a propriedade geométrica a que está relacionada. Por causa dessa indiferenciação, o ensino desconhece a especificidade das relações entre desenho e objeto geométrico e não os toma por objeto de aprendizado.

Poderíamos dar uma breve descrição dessas relações dizendo que, de um lado, a Geometria pode ser considerada como o resultado de uma modelização do desenho e que, desta forma, pode servir como instrumento de produção e de controle do desenho ou mesmo de predição. Porém, de maneira inversa, o desenho em Geometria pode ser considerado como modelo do objeto geométrico (Laborde, 1992), e, como tal, oferece um ambiente de experimentação gráfica (Chevallard, 1990). Uma vez que o ensino ignora as relações entre desenho e objeto geométrico, esse caráter de experimentação não é. digamos assim, percebido pelos alunos e menos ainda utilizado (adicionar a um desenho elementos não mencionados pelo enunciado ou pelo professor não resulta de decisões espontâneas dos alunos, mas necessita de um aprendizado). Como modelo da Geometria, o desenho é adequado a experimentações que revelem questões colocadas à teoria. Estas, traduzidas então no desenho, suscitam nele uma resposta à qual não corresponde uma resposta na teoria, e sim suposições e pistas para o trabalho teórico. Podemos desta forma traçar um grande número de triângulos e observar a inclinação em função de suas alturas.

Essas relações são sutis e isso significa que, para que os alunos se conscientizem delas, será necessário desenvolver no ensino situações-problema:

— que tratem de desenhos nos quais a Geometria é uma ferramenta eficaz de modelização e de solução; por exemplo, nos quais ela permita a produção de desenhos que satisfaçam a determinadas limitações, de forma menos custosa que o tateamento controlado pela percepção e nos quais garanta a correção do resultado: por exemplo, a Geometria responde pelo caráter tangente de uma reta em relação a uma circunferência quando esta é perpendicular ao raio;

— em Geometria onde recorrer ao desenho e fazer experiências sobre ele impedem o desvio por soluções teóricas longas demais.

Com esse pensamento, têm sido desenvolvidos, há alguns anos, ambientes informáticos que oferecem um sistema de representação de objetos geométricos por meio de desenhos na tela do computador realizáveis por comandos definidos em uma linguagem geométrica. Esses objetos na tela apresentam um domínio de funcionamento mais extenso do que os desenhos em papel/lápis e possibilitam a desqualilícação de certas interpretações ilícitas. O Cabri-Géomètre, apresentado no parágrafo seguinte, é um deles.

Características do ambiente Cabri-Géomètre

Duas características importantes desse ambiente informático[3] residem na coexistência de *primitivas de desenho puro* e de *primitivas geométricas* e na manipulação direta do desenho. Sc deslocarmos, com o auxílio do *mouse*, um dos elementos de base do desenho, este deforma-se respeitando as propriedades geométricas utilizadas em seu traçado c aquelas que decorrem dele. em conseqüência, se um desenho houver sido construído com o auxílio de primitivas de desenho puro. isto é. de modo aproximativo, ele perde suas propriedades espaciais aparentes em seu estado original quando do deslocamento de um de seus elementos. A Figura 5 apresenta um Paralelogramo obtido pelo traçado de quatro segmentos feitos de modo aproximativo na tela (os pontos superiores são os pontos de base) no estado original, à esquerda, e após o deslocamento de A, à direita.

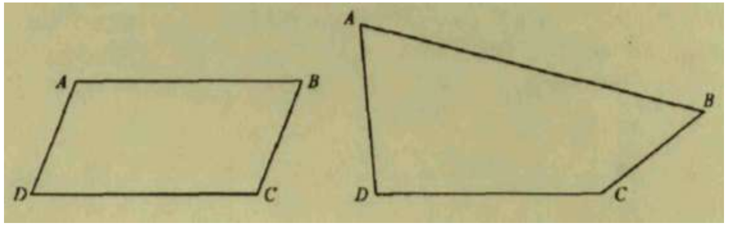

Fig. 5

[1] Para uma descrição do ambiente, cf. Bellemain, Capponi, 1992; Laborde, Strasser, 1990.

O traçado na tela de um desenho relacionado a um objeto geométrico deve manter, no curso do deslocamento, suas propriedades espaciais que caracterizam as propriedades geométricas desse objeto; ele precisa, portanto, ser produzido pelas primitivas geométricas (como ponto médio, mediatriz, reta paralela, reta perpendicular, etc). A exigência de se comunicar ao *software* um procedimento geométrico de construção possibilita a caracterização do objeto geométrico (reencontramos a necessidade que mencionamos acima da descrição discursiva do objeto geométrico para sua caracterização). Portanto, no traçado na tela do desenho de um objeto geométrico, é a interação entre as duas características do *software* que induz à utilização das primitivas geométricas, conforme indica o esquema da Figura 6. O *software* foi concebido com base em que esta passagem pelas primitivas geométricas deveria favorecer a utilização de conhecimentos geométricos.

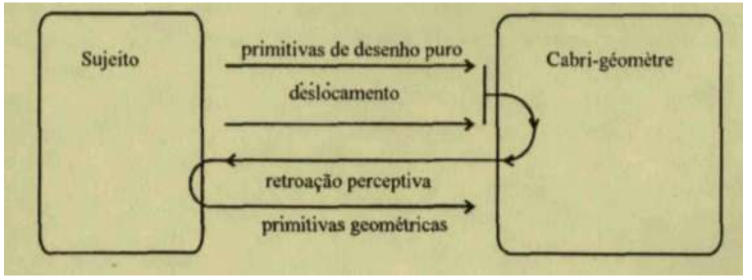

Fig. 6

Portanto, o ambiente responde à intenção de se oferecer um sistema de significantes com um domínio maior de funcionamento cm relação à Geometria e que torne mais aparentes os limites do domínio de interpretação. Devido ao deslocamento de o desenho ser controlado por uma teoria geométrica *(grosso modo* a da Geometria euclidiana), o ambiente deixa transparecer em particular a variabilidade dos elementos do objeto geométrico **e** de seu domínio de variação (extensão do domínio de funcionamento) e possibilita a desqualificação das interpretações não pertinentes (evidência dos limites do domínio de interpretação); com efeito, as propriedades atribuídas ao objeto pela leitura de um desenho que o representa têm grandes chances de aparentemente não serem mais verificadas quando da deformação do desenho.

O campo de experimentação oferecido pelo desenho no desenho papel/lápis é limitado por razões materiais (imprecisão do traçado, impossibilidade de tornar temporariamente invisível uma parte do desenho, limitação do número de elementos a serem criados). O ambiente Cabri-Géomètre não somente por suas capacidades de editor gráfico, mas também pelos conhecimentos geométricos que ele integra, aumenta o campo de experimentação possível. Tanto as ações possíveis como as respostas, além de mais amplas, são de natureza diferente uma vez que são fundamentadas em conhecimentos geométricos. O tipo de representação gráfica fornecida pelo ambiente difere, portanto, do desenho papel/lápis. Para marcar essa diferença, chamaremos, na seqüência, de Cabri-Desenho uma representação gráfica na tela de Cabri-Géomètre.

Podemos ter expectativas de novas possibilidades de organização para situações adidáticas e de modificações nos comportamentos dos alunos.

As retroações do ambiente informático

O deslocamento por manipulação direta é um dos componentes importantes do Cabri-Géomètre oferecendo uma retroação às ações do aluno.

A importância do caráter exterior das retroações

É o fato de o deslocamento se fundamentar em conhecimentos de Geometria que torna possível uma retroação exterior mais rica sobre uma mesma produção do sujeito. Tomemos o exemplo de um aluno que tenha uma tarefa para resolver que descrevemos, em termos clássicos, como uma tarefa de construção de uma figura que satisfaça a condições determinadas (em nossos termos, seria uma tarefa de traçado de um desenho de um objeto geométrico determinado proveniente de um procedimento controlado por conhecimentos geométricos). Em um contexto papel/lápis, o aluno pode virar a folha de papel e ver o desenho em diferentes posições, mas só poderá fazer variar os elementos variáveis traçando um novo desenho, isto é, empreendendo uma nova ação fundamentada em conhecimentos. Não há, portanto, retroação exterior sobre a mesma produção do sujeito, que possa facilmente mudar, de forma implícita e mesmo inconsciente, seu procedimento de traçado na produção de novas ocorrências do desenho. O uso do deslocamento implica por si só na utilização de conhecimentos; a vantagem é que essas retroações partem de um dispositivo externo ao sujeito e independente do professor: desta forma, elas são suscetíveis de fazer o sujeito evoluir.

A interpretação das retroações

A riqueza das retroações devidas ao deslocamento possibilita interpretações em diferentes níveis pelo sujeito usuário do *software*. Citamos abaixo níveis que distinguimos *a priori* em uma tarefa de construção de um Cabri-Desenho que satisfaça a condições determinadas, em uma ordem de controle crescente pelos conhecimentos geométricos do sujeito:

— pelo deslocamento colocamos o Cabri-Desenho em uma posição particular (prototípica, por exemplo) que possibilite reconhecer se a aparência que buscamos dar ao desenho foi obtida, nesse nível, a interpretação deriva essencialmente da percepção;

— certificamo-nos de que o Cabri-Desenho não se deforma com o deslocamento.

Observamos que a própria interpretação de uma ausência de relação entre constituintes de um Cabri-Desenho pode ser interpretada em dois níveis diferentes:

— como uma ausência de relação de tipo físico ou mecânico em nível do Cabri-Desenho, a interrogação do sujeito não se refere ao objeto geométrico, e sim ao Cabri-Desenho. A retificação obviamente será feita pelo uso de primitivas geométricas do *software*, mas para satisfazer a uma finalidade relacionada à aparência do Cabri-Desenho;

— como uma ausência de relação geométrica entre elementos do objeto geométrico representado pelo Cabri-Desenho. A retificação também será feita pelo uso de primitivas geométricas, mas para satisfazer a uma finalidade geométrica.

Procuramos analisar geometricamente certos elementos do Cabri-Desenho no deslocamento:

— para validar ou invalidar a construção em relação à satisfação das condições solicitadas;

— ou para procurar os erros nos casos onde a produção seja reconhecida como inválida.

Utilização na interação das possibilidades de ação e retroação

Como em toda situação, as retroações do meio podem ser solicitadas pelo sujeito que decide empreender certas ações cuja sanção pelo meio fornecerá elementos de informação sobre sua produção. Trata-se, em certos aspectos, de uma *experimentação dentro do modelo* fornecido pelo ambiente informático.

O ambiente Cabri-Géomètre possibilita esse tipo de experimentação pela conjugação do uso das primitivas geométricas e do deslocamento. Assim, para verificar que duas retas são perpendiculares, traçamos a perpendicular a uma das retas e verificamos que no deslocamento ela coincide com a outra reta.

O sujeito pode até mesmo dedicar-se a uma experimentação baseada em um cálculo inferencial: ele mostra a equivalência da propriedade P a ser verificada e de uma outra propriedade P' que pode ser verificada pelo procedimento apresentado acima. Por exemplo, para certificar-se de que construiu bem um losango, ele pode traçar a mediatriz de uma diagonal e observar, pelo deslocamento, a coincidência dessa mediatriz com a outra diagonal.

Em uma análise de um determinado Cabri-Desenho com a finalidade de identificar as dependências geométricas entre propriedades do objeto geométrico, um outro tipo de experimentação possível consiste em suprimir relações geométricas entre elementos e em verificar se as relações que supúnhamos dependentes não são mais satisfeitas.

A repetição

Margolinas (1993, p. 117) tornou evidente a importância da repetição do problema nos trabalhos de engenharia, que até então, não havia sido considerada no plano teórico. Ela demonstra claramente não se tratar, de forma alguma, de uma conseqüência de uma opção behaviorista, na qual a repetição da confrontação a estímulos possibilitaria um aprendizado por reforço, e sim de uma conseqüência de uma opção construtivista: a repetição da confrontação com o mesmo problema possibilita ao aluno a elaboração de um sentido para o problema (processo de devolução), "torna-o cada vez mais consciente do que o impulsiona a agir". A repetição é interessante quando as retroações não são simplesmente do tipo certo ou errado, mas são de natureza rica. É justamente o que a análise dos dois parágrafos precedentes tendia a mostrar. No uso regi lar de Cabri-Géomètre em um período longo em classes de 4ª e 3ª sérus[4] de um dos autores (B. Capponi), pudemos constatar, quando da resolução de problemas, uma ausência de renúncia da parte dos alunos, quase sempre um envolvimento importante representado pela sucessão de numerosas tentativas de solução e — com uma freqüência certamente um pouco menor — por uma evolução das soluções.

Um novo aprendizado?

As situações adidáticas em Geometria têm por objetivos que:

— as estratégias de solução fundamentadas em conhecimentos geométricos apareçam como mais eficazes que estratégias empíricas ou baseadas na percepção. "A Geometria resulta de um ardil, de um desvio cuja pista indireta possibilita o acesso ao que ultrapassa uma prática imediata" (Serres, 1993, p.196);

— estas estratégias não sejam a resposta a expectativas externas ao problema que o aluno acredita poder adivinhar, por exemplo, no professor ou no autor do problema.

Nossa atenção volta-se aqui para as situações que dão sentido à noção de figura geométrica; essas situações envolvem, portanto, um desenho que pode, com o auxílio de uma análise geométrica, ser interpretado como representante de um objeto geométrico. Para que esta interpretação aconteça, é preciso que seja solicitada pelo problema a ser resolvido, isto é, que a resolução do problema conduza a um tratamento geométrico. No parágrafo seguinte, procuramos determinar as modificações trazidas por Cabri-Géomètre nas características das situações: Que novos tipos de abordagem um ambiente como Cabri-Géomètre pode favorecer aos alunos? Qual novo tipo de situação adidática tornou-se possível?

[1] Equivalente, no Brasil, às 7ª e 8ª séries do 1º grau (N.lrad.).

Que tipo de problemas usar no ambiente Cabri-Géomètre?

Podemos distinguir dois tipos de problemas, conforme a produção solicitada aos alunos:

— problemas de produção de Cabri-Desenhos;

— problemas de demonstração.

No primeiro tipo de problemas, a produção solicitada é, como já vimos, de natureza "nova": não se trata de fornecer um traçado, e sim um desenho na tela que conserve certas propriedades espaciais impostas quando do deslocamento de um dos pontos de base do desenho. A tarefa do aluno consiste, portanto, na elaboração de um procedimento de produção do Cabri-Desenho, fundamentado nas primitivas geométricas disponíveis.

Além do caráter "novo" da produção solicitada, o deslocamento introduz ainda novos tipos de problemas:

— produção de Cabri-Desenhos que tenham um comportamento subordinado em nível de seu deslocamento;

— a pesquisa da generalidade do procedimento de construção;

— a reprodução de um dado Cabri-Desenho na tela que possa ser explorado pelo deslocamento.

Um Cabri-Desenho é um desenho dinâmico, além da invariância de propriedades espaciais, podemos impor limitações específicas de movimento. Por exemplo, podemos solicitar a produção de um triângulo equilátero que gire em torno de seu centro. Isso implica a imposição de pontos fixos, de pontos móveis do Cabri-Desenho e certas trajetórias.

Operamos aqui sobre a nova natureza do Cabri-Desenho—é um desenho cujos elementos descrevem trajetórias, sendo essas trajetórias ou reduzidas a um ponto do plano, ou a um subconjunto de pontos do plano ou ainda ao plano todo. A Geometria torna-se neste problema uma ferramenta de modelização de relações espaciais do desenho durante o movimento. Esse tipo de situação exige, portanto, uma análise em termos geométricos.

Alguns procedimentos de construção dependem das posições respectivas de certos elementos de base e são profundamente modificados se essas posições mudam. Tomemos, por exemplo, o procedimento de obtenção de uma tangente a uma circunferência de centro O que passe por um ponto P dado; o procedimento habitual difere, conforme o ponto esteja sobre a circunferência ou fora dela: no primeiro caso, traçamos a perpendicular ao raio, no segundo, uma circunferência de diâmetro PO. Se deslocarmos P, a tangente obtida permanece tangente à circunferência até desaparecer quando P recai sobre a circunferência. A produção de Cabri-Desenhos conduz, portanto, a um novo tipo de problemas — o da generalidade de um procedimento de construção.

Na reprodução de desenhos sobre papel/lápis, os conhecimentos geométricos podem representar uma ferramenta eficaz, mas sabemos também que o traçado empírico controlado simplesmente pela percepção pode fornecer um traçado visualmente satisfatório. A reprodução de Cabri-Desenhos desqualifica o traçado empírico controlado pela visualização. Ela exige também o reconhecimento de invariantes geométricos desse Cabri-Desenho no deslocamento, ou, dito de forma mais apropriada, ela exige que reconheçamos as propriedades geométricas com o auxílio de invariantes espaciais do desenho no deslocamento. Esse tipo de problema focaliza de forma particular a correspondência entre visualização de invariantes espaciais e sua descrição geométrica. Chamaremos de *caixa preta* essas situações-problema nas quais os alunos devem reproduzir um Cabri-Desenho na tela, de forma a obter um Cabri-Desenho com um comportamento idêntico quando do deslocamento. Essas atividades podem ser utilizadas no aprendizado das transformações geométricas.

A demonstração pode levar a outro nível no Cabri-Géomètre, uma vez que possibilita a explicação de fenômenos visuais ou mesmo a impossibilidade destes fenômenos. Desta forma, alunos da 5ª série[5] perguntaram-se se um triângulo poderia ter dois ângulos obtusos (Bergue, 1992). A precisão do *software* e o deslocamento contínuo garantem aos olhos dos alunos a impossibilidade de obtenção de tal triângulo. Eles estão em situação de assimilar a questão da explicação de tal impossibilidade. Há devolução (Brousseau, 1986) do problema da prova matemática da inexistência de tais triângulos. A demonstração assume por isso um outro nível, o da explicação das propriedades espaciais que contradizem as expectativas dos alunos. Uma outra fonte de problemas, que leva a uma demonstração, consiste em pedir que se busquem as condições às quais um objeto geométrico deve satisfazer, para que se obtenha na tela um caso particular que resista ao deslocamento. Por exemplo, sendo A, B e C três pontos fixos, sob quais condições de D as mediatrizes do quadrilátero ABCD encontram-se em um mesmo ponto? (Figura 7). Os alunos podem obter o traço do ponto D manualmente, tentando satisfazer visualmente às imposições de intersecção das quatro mediatrizes. Eles obtêm o que um de nossos colegas, J. F. Bonnet, chama de *lugar frouxo*. Mais uma vez, a demonstração aparece como um meio de se certificar da natureza desse lugar frouxo.

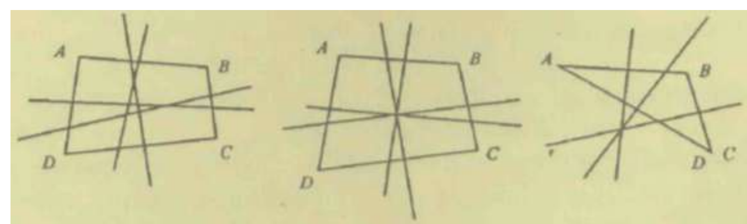

Fig. 7

[1] **Equivalente, no Brasil, à 6ª série do 1º grau (N.Trad.).**

Discussão do caráter adidático de situações de produção de Cabri-Desenhos

O caráter não didático de produção de Cabri-Desenho pode parecer mais fácil de ser satisfeito por duas razões:

— trata-se de mandar fazer e não de fazer um desenho; os alunos devem comunicar um procedimento de traçado ao dispositivo e não fazer o traçado por si mesmos. O dispositivo exige a distinção entre traçado e procedimento de traçado. Por outro lado, o professor não participa do processo de comunicação com o dispositivo;

— um Cabri-Desenho é, por definição, um desenho que conserva ao longo do deslocamento as propriedades espaciais distintivas das propriedades geométricas relacionadas ao objeto geométrico que ele representa; os procedimentos de traçado de modo aproximativo são desqualificados pelo próprio dispositivo. Pelo deslocamento, o *software* oferece uma invalidação dos traçados por aproximação, e os alunos são levados a efetivamente utilizarem as primitivas geométricas, para obterem o traçado na tela de um Cabri-Desenho de um objeto geométrico.

No entanto, será possível, a partir dessa constatação, fazer duas hipóteses suplementares segundo as quais:

— solicitar aos alunos se a produção de um Cabri-Desenho determinando o conjunto de primitivas geométricas disponíveis não abriria a possibilidade para uma pesquisa das expectativas do professor, favorecendo, dessa forma, aos alunos a pesquisa de procedimentos embasados em conhecimentos geométricos?

—a utilização das primitivas geométricas não se basearia necessariamente em um tratamento geométrico?

É evidente que não!

Gostaríamos de diferenciar essas hipóteses que fornecem um quadro demasiadamente contrastante das relações entre alunos e máquina. De um lado, fenômenos de contrato podem ser produzidos, assim como certas primitivas geométricas podem parecer aos olhos dos alunos de utilização mais desejável que as propostas pelo professor.

Por outro lado, admitimos a hipótese de que as estratégias empíricas dos alunos são reforçadas pelo fato de haver um número reduzido dos comandos de construção: é permitido que tentem construir o Cabri-Desenho solicitado, pela experimentação sucessiva de diversas combinações de *menus*, inclusive pelo número reduzido de primitivas geométricas. Não é a utilização de conhecimentos geométricos que controla o processo de traçado, mas a busca de uma série de *menus* que conduzam a um Cabri-Desenho que será validado pelo deslocamento. A concepção de situações adidáticas de construção geométrica com Cabri-Géomètre deve levar em conta a intensificação dessa dimensão empírica, escolhendo-se os traçados a serem realizados para os quais tais estratégias sejam difíceis e não conduzam ao sucesso.

Pudemos ainda constatar que se estabelece um jogo, entre uma atividade perceptiva favorecida pelo deslocamento, uma estratégia combinatória e a utilização de conhecimentos de Geometria, nas situações onde os alunos devem produzir um Cabri-Desenho, a partir de uma caracterização discursiva. Os alunos abordam o problema por combinações sistemáticas de *menus* sobre os objetos existentes. No entanto, pode ocorrer que descubram, por ocasião do deslocamento, um dos invariantes geométricos solicitados mais, relacionado a outros objetos que os desejados. Eles se colocam então em uma problemática geométrica, na qual buscam reobter esse invariante entre os objetos desejados e com esse objetivo, eles analisam geometricamente o que fizeram de forma empírica: a Geometria torna-se um meio que lhes permite controlar a reprodução de um invariante obtido de forma aleatória.

Validação da produção de um Cabri-Desenho

O ambiente também oferece uma validação pragmática de um Cabri-Desenho que satisfaça às condições dadas. Basta para tanto que o professor crie uma macroconstrução de argumentos dos objetos dados do problema que realizem a construção solicitada. Por exemplo, no problema do traçado de um quadrado de lado dado [AB], o aluno que queira verificar sua produção chama uma macroconstrução pré-gravada da construção de um quadrado de lado dado, aplica-a sobre [AB] e pode verificar se sua produção coincide com o quadrado solução, com o deslocamento de A ou de B. A superposição de dois desenhos idênticos do papel/lápis é substituída aqui, pela superposição com o deslocamento de dois Cabri-Desenhos. Essa superposição, muito provavelmente, assegura a identidade dos objetos geométricos associados. Essa possibilidade de validação provou ser capaz de relançar os alunos na atividade, quando suas produções não satisfazem as condições solicitadas.

Conclusão

O reconhecimento visual pode, portanto, desempenhar um papel importante no ambiente Cabri-Géomètre. Ora, o reconhecimento visual de propriedades espaciais associadas às propriedades geométricas não é espontâneo e deve ser o objeto de um aprendizado. A associação entre visual e geométrico raramente tem sentido no ambiente papel/lápis, que destrói a distinção entre visual e geométrico (estreiteza do domínio de funcionamento e ausência de limites aparentes do domínio de interpretação). Como foi dito, o ambiente Cabri-Géomètre foi concebido para possibilitar a distinção entre visual e geométrico. A observação dos alunos mostra que a Geometria pode também aparecer no Cabri-Géomètre como um *meio de reprodução do visual ou de sua explicação* (explicação do comportamento de um Cabri-Desenho). O geométrico não seria construído nesse ambiente somente como paliativo dos limites do visual, mas também na ligação corn o visual; o geométrico é uma *ferramenta de modelização do visual.* E uma dimensão que nos parece interessante, na medida em que a Geometria encontra sua origem no controle dos fenômenos espaciais.

Entre, de um lado e o duelo visual e geométrico de outro a ruptura entre esses dois aspectos, um caminho diferente nos parece possível, no qual o aprendizado da Geometria, em seu início, consistiria no *aprendizado do controle das relações entre visual e geométrico.* O ambiente Cabri-Géomètre oferece possibilidades de organização de um meio para a aprendizagem desse controle por três razões:

— os fenômenos visuais ganham importância pela dimensão dinâmica do Cabri-Desenho;

— esses fenômenos são controlados pela teoria, pois são o resultado de uma modelização gráfica e de um modelo analítico de propriedades geométricas;

— as possibilidades sem limites de situações geométricas que podem ser visualizadas com um grande número de objetos de forma precisa.

Referências bibliográficas

ART1GUE, M. Analyse de processus en environnement informatique. *Petit X,* n.26, p.5-27, 1991.

BELLEMAIN, F., CAPPONI, B. Spécificité de 1'organisation d'une séquence d'enseignement lorsde l'utilisation de 1'ordinateur. *Educational Studies in Mathematics,* v.23, n.l,p.59-97, 1992.

BERGUE, D. Une utilisation du logiciel "Géomètre" en 5éme. *Petit X,* n.29, p.5-13, 1992.

BERTHELOT, R., SALIN, M.H. *Tenseignement de l'espace et de Ia géométrie dans Ia scolarité obligatoire.* [S.l.], 1992. Tese — Université Bordeaux 1.

BESSOT, A. *Representation graphiques et maitrise des rapports avec I'espace.* Montreal, Canada: Université du Quebec à Montreal, 1993. (Publications du RADE).

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v.7, n.2,p.33-115, 1986.

CAPPONI, B. Modifications de menus dans Cabri-géomètre: des symétries comme outils de construction, *PetitX,* n.33, p.37-68, 1993.

CHEVALLARD, Y. Autour de 1'enseignenment de la géométrie. *PetitX.* n.27, p.41-76, 1990.

CORDIER, F., CORDIER, J. Uapplication du théorème de Thales. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v.ll, n.l. p.45-64, 1991.

DUVAL, R. Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* Université Louis Pasteur et IREM de Strasbourg, v.l, p.57-74, 1988.

F1SHBEIN, E. The theory of figurai concepts. *Educational Studies en Mathematics,* v.24, n.2, p. 139-162, 1993.

FISHER. Visual influences of figure orientation on concept formation in geometry. In: RECENTE Research Concerning the development of spatial and géométrie concepts. Colombus, Ohio: ERIC Center for Sciences, Mathematics and Education: Ohio State University, 1978.

GRAS, R. Une situation de construction géométrique avec assistance logicielle, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v.8, n.3, p. 195-230, 1987.

LABORDE, C. *Enseigner Ia géométrie:* permanences et révolutions. Quebec, 1992. Conference pléniére au 7éme Congrés International sur l'Enseignement des Mathématiques, ICME 7, Quebec, Canada, ago. 1992.

LABORDE. J. M., STRÀSSER, R. Cabri-Géomètre, a microworld of geometry for gruided discovery learning. *Zentralbaltfür Didactik der Mathematik,* v.90, n.5, p. 171-90, 1990.

MARGOLINAS, C. *De I 'importance du vrai et du /aux dans Ia classe de mathématiques.* [S.l.]: La Pensée Sauvage. 1993. 256p.

MARIOTTI, A. Age variant and invariant éléments in the solution of unfonding problems. In: FURINGHETTI. F. (Ed.). *Proceedings of PME XT.* Assisi, Itália, 1991. v.2 p.389-396.

MESQUITA, A.L. *L 'influence des aspects figuratifs dans I 'argumentation des éléves:* éléments pour une typologie. Strasbourg, 1989. Tese (Doutorado) — Université Louis Pasteur.

NOIRFALISE, R. Figures préganantes en géométrie? *Repères — IREM,* n.2, p.51-58, 1991.

PADILLA, V. Les figures aident-elles à voir en géométrie? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* ULP, IREM de Strasbourg, v.3, p.223-252, 1990.

PARZYSZ, B. Knowing vs seeing: problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics,* v. 19, n.l,p.79-92, 1988.

SERRES, M. *Les origines de Ia géométrie.* Paris: Flammarion, 1993.