O ENSINO CONSTRUTIVISTA*

Beatriz S. D'Ambrósio e
Leslie P. Steffe**

O modelo de conhecimento que Glasersfeld (1987) chama construtivismo radical estabeleceu suas raízes em Educação Matemática a partir de 1980. e tem tido seu maior impacto na investigação da natureza do conhecimento matemático e na metodologia de pesquisa (Cobb, Steffe, 1983; Steffe, Cobb, 1988). Só recentemente o ensino da Matemática tem sido analisado por construtivistas (cf. Confrey, 1990; D'Ambrósio. Mewborn, 199-; Steffe, Tzur, 199-; Simon, 1992). Conseqüentemente, a forma que toma o ensino da Matemática dentro de uma linha construtivista está ainda por ser determinada. Vários construtivistas (Konold, Simon. Janvicr) argumentam contra a noção de que possa haver um tipo de ensino chamado de ensino construtivista. O argumento mais comum é o de que todas as crianças constroem conhecimento independentemente do tipo de instrução utilizado no processo de ensino.

Apesar de não discordarmos desse argumento, nos aventuramos a dizer que certos objetivos e ações ao professor podem moldar a natureza das interações matemáticas dos alunos e conseqüentemente de suas atividades construtivas. De qualquer forma, o professor está sempre trabalhando diante de certas condições que são importantes para a nossa definição do ensino construtivista. Essas condições podem refletir limitações do atual conhecimento matemático do aluno assim como limitações das ações do professor ao criar situações de aprendizado. O professor poderá compreender essas limitações na medida em que examina a Matemática de seus alunos. O professor que estuda a construção matemática de seus alunos e que interage com os alunos num espaço de aprendizagem cujo desenho está baseado, pelo menos em parte, num modelo de Matemática do aluno, será chamado de professor construtivista.

Um segundo argumento contra a idéia de um tipo de ensino chamado construtivista baseia-se na visão de que um "bom ensino" pode ocorrer mesmo que o professor não trabalhe dentro de uma visão construtivista do processo de aprendizagem (Kilpatrick, 1987; Konold. 199-). Mais uma vez não discordamos deste argumento. Mas esse argumento não implica que possamos definir um tipo de ensino que possa ser chamado de construtivista. Nosso objetivo neste trabalho é de começar a caracterizar o "bom ensino" dentro de uma linha construtivista. Nós não nos propomos a prescrever as ações pedagógicas descritas, nem asseguramos que tais ações possam garantir o bom ensino. Acreditamos que a combinação daquilo que o professor acredita sobre o processo de aprendizagem, com suas ações e com o contínuo aprendizado do professor, durante todo o processo de ensino, permite-nos descrever o perfil do professor construtivista. As ações do professor são função de seu conhecimento e de suas crenças, como também de sua interpretação das ações e da linguagem dos alunos.

O projeto das frações

Neste trabalho descreveremos algumas características que consideramos importantes sobre o ensino construtivista e ilustraremos com exemplos de episódio de ensino extraídos do projeto "Children's Constructions of

* Neste trabalho procuramos caracterizar o ensino construtivista da Matemática. Analisamos três componentes do ensino construtivista que consideramos essenciais para nossa compreensão das ações do professor construtivista. Esses componentes incluem a construção da matemática da criança pelo professor, a natureza das atividades usadas pelo professor para definir o espaço da aprendizagem e o processo de comunicação entre professores e alunos num ambiente de aprendizagem construtivista. Nosso objetivo foi de extrair descrições e ilustrações dos componentes do ensino construtivista presente em nossas experiências com um teaching experiment (uma seqüência de episódios de ensino) realizado com crianças trabalhando dentro de um micromundo de frações.

** Da Universidade de Geórgia.

the Rational Numbers of Arithmetic"'. Referimo-nos a este projeto como o Projeto de Frações. O *teaching experiment* (coletânea de episódios de ensino) é um instrumento de pesquisa que utilizamos para compreender a Matemática das crianças e sua construção (Cobb. Steffe, 1983). O objetivo principal do Projeto de Frações é de construir um modelo das operações mentais que geram os números racionais da Aritmética. Com este fim, investigamos as ações e operações de crianças dentro de um micromundo chamado *STICKS*. Todas as atividades a que nos referimos neste trabalho são atividades propostas aos alunos dentro desse micromundo. Nesse micromundo. as crianças podem operar as diversas formas com um modelo linear, uma representação de uma vareta. Dentre as operações possíveis, a criança pode criar, copiar, juntar, quebrar. marcar, partir, colorir e medir. O professor pode ativar ou desativar quaisquer das operações, o que lhe permite manipular o espaço das ações possíveis. Por exemplo, suponhamos que o objetivo de um episódio seja de envolver os alunos em situações que exijam que o aluno faça estimativas de frações de uma vareta. É provável que o professor desative a operação PARTIR, que. quando ativada, subdivide a vareta em parte iguais. As limitações do espaço de aprendizado produzidas pela falta de certas operações levam o aluno a utilizar ações e operações das mais básicas na solução de uma situação proposta. Essas soluções podem revelar aspectos importantes das operações mentais e dos esquemas utilizados pelos alunos. Acreditamos que para compreendermos o ensino construtivista é importante explicarmos nossas ações e nosso pensamento durante os episódios de ensino do Projeto de Frações. A auto-reflexividade — a aplicação de princípios de construtivismo para a análise de suas próprias atividades — é uma característica importante do construtivista (Sicir. 199) e logicamente, do professor construtivista. Primeiro ilustraremos o processo pelo qual o professor c onstrói modelos da Matemática do aluno durante um episódio de ensino. Esses modelos são continuamente modificados durante o trabalho com o aluno e durante a análise retrospectiva dos episódios de ensino. Segundo, descrevemos o processo de comunicação entre os participantes de um episódio de ensino. Terceiro, descrevemos a natureza das atividades propostas durante um episódio de ensino e a influência do modelo de Matemática dos alunos construído pelo professor nas atividades utilizadas durante um episódio.

'Êste projeto foi financiado pelo National Science Foundation — NSF, n° RED-8954678. Todas as opiniões são exclusivamente dos autores.

A matemática do aluno

Entender o conhecimento como algo num estado de constante evolução e adaptação caracteriza a visão do construtivista. As histórias pessoais e histórias culturais de indivíduos modelam suas interpretações de atividades, experiências e interações sociais. A compreensão da Matemática nesta luz, aceitando interpretações e explanações matemáticas, que não são as tipicamente aceitas pela comunidade matemática formal, é um dos aspectos mais difíceis que um indivíduo enfrenta quando procura compreender o construtivismo.

Para a professora, a necessidade de aceitar uma outra Matemática, distinta da sua. durante um episódio de ensino c tremendamente difícil. A professora pode descobrir que o seu conhecimento de Matemática não a ajuda a compreender o conhecimento matemático de alunos específicos, nem tampouco determinar como ajudar na aprendizagem de seus alunos. Ao comparar seu conhecimento matemático com o de seus alunos, o máximo que a professora possa vir a dizer é que o aluno parece não saber. Em quase toda sua experiência com a Matemática, a professora vivenciou a Matemática como uma disciplina fixa e rígida, uma disciplina onde o aprendiz tenta compreender algo que lhe é apresentado, indiscutivelmente, algo que está nos livros.

Uma professora construtivista tem uma visão muito diferente do que vem a ser o conhecimento matemático. Para a professora construtivista o conhecimento matemático de qualquer indivíduo, inclusive da própria professora, está em constante evolução e modificação. A interpretação do aluno sobre uma situação matemática proposta pode variar muito, dependendo de sua história pessoal e cultural. A aceitação do conhecimento do aluno como Matemática legítima, apesar de sua aparência estranha e pouco familiar, pode gerar uma Matemática do aluno muito diferente da Matemática do professor.

O objetivo da professora construtivista é de desenvolver um modelo de conhecimento matemático de seus alunos. Esses modelos são da maior importância, pois dão direção às ações da professora ao imaginar possíveis situações de ensino. Ao trabalhar com um aluno, a professora procura elucidar o conhecimento matemático do aluno e modificar esse conhecimento. O conhecimento matemático do aluno é comunicado à professora na forma de ações ou verbalizações (uma forma de ação). Ao refletir sobre as ações dos alunos, a professora pode desenvolver uma hipótese sobre suas construções passadas e presentes. O modelo construído pela professora sobre a Matemática do aluno depende de inferências tiradas pelo professor através do processo de interação social e é altamente influenciado pelo conhecimento matemático do próprio professor (Kieren. 199-).

Professores construtivistas são participantes na vida matemática de seus alunos, e assim, estão envolvidos em ativamente aprender sobre a Matemática de seus alunos. Como aprendizes da Matemática de seus alunos, os professores enfrentam momentos de perturbações e desequilíbrio, conforme proposto por Piaget. Esses momentos ocorrem quando as hipóteses do professor são contrariadas pelas ações de seus alunos. Em outras palavras, a criança age de forma inesperada pelo professor. Uma resolução parcial dessas perturbações resulta em novas ações pelo professor, conforme reformula suas hipóteses e as testa em novas situações de ensino.

O seguinte protocolo serve para ilustrar a modificação da hipótese de uma professora durante um episódio de ensino. A professora, Deborah, trabalhou com Pamela e Raimundo durante dois anos. As duas crianças, no momento deste episódio, estavam na quarta série do ensino primário. Episódios de ensino, dentro do Projeto de Frações, ocorriam durante uma hora por semana, fora das atividades normais da sala de aula. Neste episódio, Deborah coloca um problema para Pamela resolver que reflete uma hipótese inicial: as dificuldades destas crianças com o trabalho de frações. Esse episódio de ensino foi dedicado a ajudar as crianças a trabalharem com linguagem de frações para expressar dadas situações e a relação entre varetas de diversos tamanhos. A maneira de descrever as varetas foi desenvolvida junto às crianças em episódios anteriores. As crianças criam uma vareta que serve de unidade e constroem outras varetas de diversos tamanhos, identificando-as pelo número de varelas-unidadc utilizadas na sua construção. Por exemplo, a varcta-6 é uma vareta construída repetindo a vareta-unidade seis vezes e juntando os seis pedaços.

Protocolo 1 (7:20-11:20; 29/10/92)

D: O que você teria se juntasse duas varetas-6?
P: Uma vareta-12.
D: Você pode me construir uma vareta-12 usando duas varetas-6?
(Pamela constrói a vareta-12 copiando e juntando duas varetas-6. Deborah pinta uma das partes).
D: Esta parte é minha e esta é sua. Qual nome você daria à sua parte?
P: Um meio.
D: Ok. O que resulta se você juntar três varetas-6?
P:9.
D: Ok. Faça a vareta-9. (Pamela constrói a vareta-9).
D: Esta é minha parte, ou melhor, a parte roxa é sua parte, a rosa é minha, a azul é do doutor Steffe. Que nome você daria à sua parte?
P: Um terço.
D: Que nome daria à minha parte?
P: Não sei.
D: Quanto eu tenho?
P: Um terço.
D: Quanto você tem?
P: Um terço.
D: Quanto temos juntas?
P: Dois terços.

Durante todo o episódio, Deborah enfatizou o uso da linguagem de frações corn as crianças. Ao mesmo tempo, Deborah procurou ligara linguagem de frações à linguagem natural das crianças, conforme mostra o protocolo 2, que é continuação do protocolo 1.

Deborah pergunta à Pamela o que obteriam se juntassem quatro varetas-2. Pamela diz "uma vareta-8". Deborah procede pedindo à Pamela que faça essa vareta, o que ela faz em seguida. Após algumas outras perguntas. que não apresentam dificuldades para Pamela, o seguinte diálogo ocorre:

Protocolo 2 (11:10-14:04; 29/10/92)

D: Se juntarmos três partes quanto teremos? (apontando para três quartos da vareta-8)
P: Um terço.
D: Por quê?
P: São três das quatro partes.
D: Qual o tamanho?
P: Três dos dois.
D: E quanto é três dos dois?
P: Um quatro e um dois, que é um terço.
D: Quanto é um quatro e um dois juntos?
P: Um oito, quer dizer um seis.
D: Então, temos seis partes das oito partes.

Pamela parece estar atenta às três partes e procurando dar nome a uma das partes. O diálogo entre as duas levou Deborah a questionar sua hipótese de trabalho. Deborah formou uma nova hipótese de trabalho, baseada nos comentários de Pamela, que o tamanho de cada uma das quatro peças (duas varetas-unidades) confundiu a situação para Pamela. Pamela formou, de fato, quatro partes de tamanho dois e daí se referiu a três das quatro partes. Temos duas conjecturas procurando explicar por que ela chamou de "três das quatro partes" de um terço, e depois se referiu a "três dos dois" como um quatro e um dois. Primeiro, ela pode ter passado a considerar o inteiro como "três dos dois", ao invés de considerá-lo oito. Segundo, ela pode ter criado três novas unidades — uma de valor quatro e outras duas de valor dois, e chamado uma das partes de um terço. De qualquer forma, a situação levou-a a utilizar o termo um terço.

Deborah. por sua vez. na procura de uma explicação do que Pamela pensava, procurou utilizara perspectiva de Pamela de uma parte de valor quatro e outra de valor dois para tentar redefinir a situação para Pamela c apontar para o uso de seis oitavos, porém sem sucesso. Pamela estava convencida durante essa interação que as três peças eram de fato um terço da vareta-8 e isso criou uma perturbação para Deborah, pois não havia uma explicação baseada na sua hipótese de trabalho de que a raiz da dificuldade de Pamela estava na linguagem de frações. Pamela já havia demonstrado que podia utilizar o termo três quartos para se referir a três de quatro partes iguais.
Apesar de a pergunta sobre o uso de linguagem, a hipótese de trabalho de Deborah durante vários episódios, estar dando direção a todo seu trabalho com as crianças, ela não perde de perspectiva a hipótese mais geral do projeto, de que esquemas de trabalho com frações são modificações de esquemas de trabalho com números inteiros. Os esquemas de trabalho com números reais das crianças oferecem uma janela para compreendermos seu conhecimento matemático, e era o objetivo do projeto basear nossos episódios de ensino naquilo que vinha sendo revelado por essa janela.

Comunicação

Existem muitas formas de comunicação verbais e não-verbais, que ocorrem durante um episódio de ensino. Essas formas de comunicação são de onde professores extraem sua informação levando aos modelos da

Matemática das crianças. Comunicação como ação produz perturbações para o professor e muitas vezes para o aluno também. Referimo-nos aqui ao trabalho de D'Ambrósio (1991) no qual ele descreve comunicação como uma "ação comum". Durante uma interação social ocorrem muitas formas de ação dos participantes. Algumas são intencionais e dirigidas aos indivíduos envolvidos na interação. Outras formas não são intencionais, porém transmitem muita informação e mensagens. Por exemplo. uma criança que senta e pensa em silêncio sobre um problema durante um episódio de ensino pode não ter como objetivo transmitir que está envolvido com o problema, mas o professor pode imaginar o que o aluno está pensando e antecipar um resultado. Apesar de não-verbal, há um tipo de ação comum entre o professor e o aluno, pelo menos no que se refere ao fato de que a situação colocada pelo professor foi aceita pela criança como um problema. Um "bom professor" muitas vezes infere o que pensa a criança e sente harmonia com o pensamento da criança. Outro exemplo seria o caso da criança que exibe ações ao resolver situações propostas. Nestes casos, o professor pode imaginar o sentido da ação para o aluno e por que o aluno demonstrou aquela ação e não alguma outra. O professor pode colocar outra situação que reflete suas hipóteses procurando explicar a necessidade de a criança agir daquela forma.

Uma ação verbal ou não-verbal transmite significado e mensagens somente quanto outro indivíduo se empenha em interpretá-la. Essas são as situações em que D'Ambrósio considera haver uma ação comum. As ações podem não ser idênticas, mas há uma forma de compreensão mútua. Infelizmente, pouco do que ocorre numa sala de aula de Matemática pode ser considerado ação comum, ou seja, comunicação. Em muitos caso; as ações verbais e não-verbais dos professores não são ouvidas e muito menos interpretadas pelos alunos. Semelhantemente, as ações e verbalizações das crianças nâo são procuradas, usadas, interpretadas ou sequer fazem parte de uma interação social.

A compreensão do que vem a ser ensino construtivista envolve compreender o processo de comunicação. Alunos (e professores) criam significados durante uma comunicação baseados em um repertório de ações comuns e histórias pessoais. Interpretação e significado estão ligados também às experiências comuns e histórias comuns dentre os participantes no processo de comunicação. Neste sentido, o professor construtivista vai além das observações e se torna um participante ativo e intérprete dos episódios de ensino. A compreensão da história das experiências comuns entre o professor e os alunos é crítica na interpretação da comunicação entre eles.

Gostaríamos de enfatizar o uso da ação como uma forma de comunicação que não requer linguagem. Em vários momentos do Projeto de Frações. tivemos evidência da fluência de ações das crianças refletindo sua compreensão de um problema, sem que a criança pudesse utilizar linguagem para explicar suas ações.

No seguinte protocolo. Pamela resolve um problema proposto por Deborah. mas é incapaz de articular claramente sua estratégia de solução ou a razão por trás dos passos para a solução. Deborah usa a voz de Pamela para tentar ajudar Raimundo a compreender a situação, mas no final ele continua sem entender a solução.

Protocolo 3

D: A vareta-8 é dois terços de que vareta?
P: 16. É dois terços... (pensa um pouco e responde) 12.
D: (Espera alguns momentos para que Raimundo tenha uma oportunidade para pensar. Como ele hesita, Deborah sugere que ele coloque a vareta-8 na tela).
R: (Coloca a vareta-8 na tela).
D: Essa vareta é dois terços de alguma outra.
R: Não sei.
D: Pamela, você pode nos explicar como determinou o valor 12?

P: Bem, quatro mais quatro é 8.
D: E o que isso nos indica?
P: (Pensa um pouco). Não sei.
D: Se a vareta-8 é dois terços, quanto vale a vareta-4?
P: Se a vareta-8 é dois terços, quanto vale a vareta-4? Um terço?
D: É. Isso faz sentido, Raimundo?
P: Você tem dois quatros e mais um três.

Pamela assimilou a situação proposta por Deborah utilizando seus esquemas de operações corn frações. Pamela está consciente do que ela fez ("Bem, quatro mais quatro é 8") mas não consegue analisar suas ações ("E o que isso nos indica?" "Não sei"). Ela não consegue verbalizar por que está correta, ou seja. a estrutura de suas ações estão corretas. Alguns diriam que a solução foi intuitiva. Nós diremos que ela não tem consciência da necessidade lógica interna de suas operações. Porém, Deborah, através de suas observações pode inferir que Pamela construiu, de fato, uma solução para o problema proposto.

Neste exemplo de fluência de ação, nós acreditamos que Pamela está consciente do resultado de suas operações, mas não de como ela operou para produzir o resultado. Neste caso, não poderia ter havido fluência no seu uso de linguagem para se referir àquelas ações. Mais ainda, Raimundo não consegue se envolver em comunicação com Pamela. Com certeza, ele interpretou o comentário de Pamela ("você tem dois quatros e mais um é três") utilizando seus esquemas operatórios, porém os esquemas não eram os necessários para levar à sua compreensão do que Pamela fez. Ele ainda não havia produzido sua própria solução que lhe permitiria interpretar as operações de Pamela e compará-las à sua solução.

Natureza das atividades

As atividades constituem um meio de realizar ações e geram ação em comum. Num episódio de ensino construtivista, atividades servem de meio para instigar ações e conseqüentemente comunicação, já que abrem caminhos para crianças e professores comunicarem. Uma professora construtivista modela as atividades baseando-se no seu modelo da Matemática das crianças.

As atividades utilizadas no Projeto de Frações foram criadas para atingir vários objetivos. Primeiro, servem para revelara Matemática das crianças. Conforme as crianças se envolvem nas atividades propostas pela professora, a professora pode observar e refletir sobre as ações da criança e as suas. Conforme a professora se comunica com as crianças dentro do espaço gerado pelo micromundo, ela gera e reformula hipóteses sobre a Matemática das crianças. Novas atividades são formuladas para testar as hipóteses.
Segundo, as atividades servem para testar a potencial zona de construção do aluno. A potencial zona de construção é uma hipótese de trabalho tida pela professora que indica o que ela acredita que a criança possa construir, dentro de seu modelo da Matemática da criança. O seguinte protocolo demonstra a idéia de Deborah de uma atividade que ela acreditava estar dentro da potencial zona de construção de Raimundo. (Nota: Pamela já havia resolvido uma atividade semelhante independentemente.)

Protocolo 4 (5:35-11:19; 12/11/92)

D: Eu vou fazer uma vareta que é dois terços de outra vareta (Deborah desenha uma vareta-6 na tela). Qual o tamanho da vareta maior?
P: 18?
D: Essa (aponta à vareta na tela) é dois terços de uma maior. De que tamanho é a vareta maior?
P **e** R: (Pensam por um tempo).
P: Repita por favor.
D: Essa vareta-6 é dois terços de alguma outra vareta. Essa é dois terços de qual vareta? Raimundo você tem alguma idéia?

R: Uma vareta com 18 pequenas partes... (aparentemente está usando o comentário inicial de Pamela).
D: De uma vareta-18?
R:É.
D: Por quê?
R: Porque... (hesita e não responde).
D: Se esse é dois terços você pode me dizer o que é um terço?
P: É... (aponta para a vareta-3).
D: Você pode me mostrar construindo a vareta na tela?
P: (Pamela coloca a vareta-3 do lado da vareta-6).
D: Você concorda Raimundo? Se a vareta cor-de-rosa é dois terços, então a vareta amarela é um terço?
R: (Raimundo coloca a vareta amarela em cima da rosa e diz): Não, isso faz somente dois. Você teria que juntar outra (passa a vareta amarela para a ponta). Daí daria certo.
D: O que você obteria se juntasse a amarela nessa ponta?
R: Hummm. Obteria uma vareta... o que será que seria?
D: Pamela, diga-nos por que a vareta-3 é um terço, quando a vareta-6 é dois terços?
P: Porque 6, 3 vezes 2 é 6, então dois 3 são seis.
D: Raimundo, isso faz sentido?

Deborah procede para explicar, mas Raimundo comunica, através de expressões corporais e verbais, que não está entendendo. Pamela, por outro lado, podia verbalizar sua solução apesar de não muito fluentemente.

Há claramente dissonância entre o par de alunos. Enquanto Pamela parece capaz de resolver a situação, Raimundo não consegue. A inabilidade de Raimundo de resolver a situação inicialmente produziu um conflito para Deborah. Sua pergunta "se esse é dois terço você pode me dizer o que é um terço?" foi uma tentativa de modificar a situação na procura de uma atividade dentro da potencial zona de construção de Raimundo. A dificuldade de Raimundo mesmo com essa nova situação levou Deborah a formular um modelo de trabalho muito mais explícito da compreensão de Raimundo sobre frações. Os esquemas de operações de Raimundo pareciam irreversíveis, enquanto Pamela parecia ter esquemas reversíveis.

Qualquer modelo de trabalho representa uma hipótese, portanto, através de uma análise retrospectiva, Deborah planejou outra modificação nas atividades para acomodar as dificuldades de Raimundo. O protocolo demonstra que ela não está totalmente convencida de que os esquemas de Raimundo são de fato irreversíveis.

Protocolo 5 (13:25-16:07; 17/11/92)

D: Qual vareta poderíamos repetir três vezes para obter a vareta-18?
R: 3 vezes 6 (desenha três varetas-6).
D: Então, essa é uma vareta-18. Se você pintar uma das partes o que teria pintado?
R: Hummm (hesita)... um terço.
D: E se você pintasse as duas primeiras partes?
R: Dois terços.
D: Qual o tamanho de dois terços comparado com um terço?
R: É o dobro.
D: Então, se eu lhe desse uma vareta e lhe dissesse que é um terço de alguma outra, você poderia construir dois terços?
R: Sim, é só fazer outra aqui.
D: Então, faça.
R: (Resolve corretamente).
D: E se eu invertesse a pergunta. E se eu desse uma vareta de dois terços e pedisse para você construir uma de um terço?
R: Ah, eu tiraria duas partes. (Na tela há uma vareta decomposta em 3 parte iguais. Raimundo modifica o problema para um que ele já superou e mostra um terço numa figura onde constam três terços).
D: Ok. (Apaga toda a tela e desenha uma nova vareta, sem nenhuma subdivisão). E se eu dissesse que essa é dois terços, como você construiria um terço?
R: Eu dividiria em três partes.
D: Três?
R: É. Para obter terços.

Raimundo, apesar das modificações feitas por Deborah, ainda não raciocina de forma reversível. Ele não parece capaz de construir o inteiro, dada a parte fracionária. Apesar de ele resolver com sucesso a situação em que Deborah pede para que ele utilize uma fração unitária para reconstruir o inteiro reiterando o pedaço dado, ele parece incapaz de partir de uma fração não unitária, construir a fração unitária e reconstruir o inteiro. Neste momento. Deborah se convence de que a situação permanecerá sem solução para Raimundo, pelo menos temporariamente. Seu próximo passo é de procurar explicar por que isso ocorre, o que refinaria ainda mais seu modelo dos esquemas de frações de Raimundo. Note que não é suficiente dizer que seus esquemas são irreversíveis na formulação do modelo. É preciso ir além e especificar as operações constitutivas de seus esquemas e o nível de abstração em que elas parecem operar, o que está além do objetivo deste trabalho (cf. Steffe. Cobb, 1988. para um exemplo do tipo de explanação a que nos referimos). Usamos aqui os protocolos para obter algum *insight* sobre o que consideramos importantes características do ensino construtivista.

Comentários finais

Concordamos com Edith Ackermann (199-) quando ela comenta que "eu acredito que o ensino construtivista seja um elo difícil de entender" (tradução nossa).

> *A essência do dilema do professor reside na seguinte questão:*
>
> *Como um professor pode vir a dar razão ao aluno (Duckworth, 1987) apreciando a novidade e consistência do seu pensamento, ao mesmo tempo, dando razão aos especialistas cujo pensamento coincide com as mais avançadas idéias na área* (Ackermann, tradução nossa).

Esse dilema é parcialmente resolvido com a realização explícita de que é o professor que dá razão ao pensamento do aluno. Ou seja, dentro da perspectiva do professor, a Matemática do aluno é construída dos elementos perceptuais do professor. Nós entendemos a Matemática do aluno como um sistema conceituai tido pelo professor que, quando aplicado a um aluno particular (ou a alunos particulares), forma uma explanação da Matemática daquele aluno (ou alunos). A compreensão deste fato é importante para reconsiderarmos o dilema proposto por Ackermann.

Nós aceitamos que nossos alunos possuem conhecimento matemático próprios que são diferentes do nosso conhecimento matemático. Porém. o melhor que podemos fazer é formular um modelo do seu conhecimento baseado nos nossos elementos perceptuais. Não podemos conhecê-lo independentemente de nosso modo de conhecer e entender. O modelo não existe para nós a não ser que nós o construamos, e essa construção implica que vemos certos alunos de certa forma dentro de determinado contexto.

O que diferencia nosso conhecimento da Matemática do aluno de nosso próprio conhecimento? Se um aluno resolvesse qualquer problema de fração que lhe pudéssemos colocar, não haveria motivo para fazer uma distinção entre o conhecimento do aluno sobre frações e o nosso conhecimento. As limitações, como as dos protocolos 2 e 5 que vivenciamos como professores ao interagir com alunos nos forçam a fazer uma distinção. Encontramos limitações desse tipo. conforme os alunos procuram resolver atividades que lhes propomos sem nossa intervenção. Não saberíamos, porém, que essas limitações são necessárias sem tentar neutralizar as perturbações que encontramos quando os alunos não conseguem resolver situações que lhes propomos. Modificamos as situações, pedimos aos alunos que expliquem o seu modo de pensar a outros alunos, e criamos novas situações de ensino. Essas intervenções nos servem para tentar modificar os esquemas de ação e operação dos alunos. Como professores construtivistas, temos que nos relembrar que são os alunos que devem fazer as modificações em seus esquemas, independentemente de nossas ações. De certa forma, nós, professores. resolvemos os nossos problemas somente a partir do momento que os alunos resolvem os deles.

Tentar ajudar o aluno a se ajudar é muito mais complicado do que lhes dizer o que devem fazer, o que consideramos extremamente contraprodutivo. Apesar de não termos adequadamente ilustrado este trabalho, durante os episódios de ensino, procuramos organizar as atividades propostas aos alunos de forma que se encontrem na "beirada" do conhecimento do aluno. Organizamo-las também de forma que possam contribuir para modificações nos esquemas dos alunos. Consideramos nosso conhecimento inacessível aos nossos alunos, portanto é nossa responsabilidade aprender como agir como professores para estabelecer um meio em que haja comunicação. Neste sentido, queremos reconsiderar o dilema de Ackermann.

> *A essência do dilema do professor reside na seguinte questão:*
>
> *Como um professor pode vir a dar razão ao um aluno, apreciando a novidade e consistência do seu pensamento, dando, ao mesmo tempo, razão ao seu próprio conhecimento matemático?*

Apesar de todo o trabalho já existente que procura especificar a Matemática de alunos, esta não está pronta para nenhum professor. Há benefícios em ler trabalhos e comunicar com outros sobre formulações da Matemática de alunos. Porém, é essencial que cada professor interaja com seus alunos de forma a aprender o seu modo e meios de operar e conhecer. Um sistema conceituai que temos chamado de Matemática do aluno tem que ser construído através da interação com o aluno. O professor que procura determinar tudo o que pode sobre o pensamento matemático de seus alunos pode ser chamado de professor construtivista, e o tipo de atividades que ele utiliza para esse fim de ensino construtivista. Para nós, o dilema, mesmo modificado, desaparece quando a Matemática do aluno é considerada uma Matemática legítima.

No ensino construtivista trabalhamos sob a proposta de que a Matemática é o resultado de operações mentais. Como taí, a Matemática não pode ser vista como uma disciplina elitista reservada apenas a alunos talentosos. Matemática deve ser considerada uma atividade humana, como a linguagem ou a música. O objetivo do ensino construtivista é de compreender essa atividade e os seus resultados.

Referências bibliográficas

ACKERMANN. E. Construction and transference of meaning through form. In: STEFFE, L.P, GALE, J. (Eds.). *Constructivism in education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, [199-].

COBB, P, STEFFE. LP. The construetivism researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 14, p. 84-94, 1983.

CONFREY, J. What construetivism implies for teaching. In DAVIS, R. B.. BAKER. CA., NODDINGS. N. (Eds). Construetivism views on the teaching and learning of mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, Reston, p. 107-122, 1990. Monografia n.4.

D'AMBRÓSIO, U. *Several dimensions of science education:* a Latin American perspective. Santiago: REDUC, 1991.

D'AMBRÓSIO. B., MEWBORN, D. Children's construction of fractions and their implications for classroon instruction. *Journal of Research in Childhood Education*, [199-].

DUCKWORTH, E. *The having of wonderful ideas, and other essays on teaching and learning.* New York: Teachers College Press, 1987.

GLASERSFELD, E. von. *The construction of knowledge:* contributions to conceptual semanties. Seaside, CA: Intersystem, 1987.

JAN VIER, C. Constructivism and its consequences for training teachers. In: STEFFE, L.P., NASHER, P. (Eds.). *Theoriei of Mathematics learning.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, [199-].

KIEREN, T. Orthogonal refletetions on computer microworlds, constructivism, play. and mati.omatical understanding. *Journal of Research in Childhood Educatifi,* [199-].

KILPATRICK, J. What constructivism might be in mathematics education. In: ANNUAL MEETING OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 11, 1987. Montreal. *Proceedings.* Montreal, 1987. p.3-27.

KONOLD, C. Social and cultural dimensions of knowledge and classroom teaching. In: STEFFE. L P, GALE, J. (Eds.). *Constructivism in education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, [199-].

SIMON, M. Assessing teachers development of a constructivist view of learning. *Teaching and Teacher Education,* n.8, p. 187-197, 1992.

________. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* [199-].

STEFFE, L.P, TZUR. R. Interaction and children's Mathematics. *Journal of Research in Childhood Education,* [199-].

STEFFE, L.P. COBB, P *Construction of arithmetical meanings and strategies.* New York: Springer, 1988.

STEIR. F. From universing to conversing: an ecological constructionist approach to learning and multiple description. In: STEFFE. L.P, GALE. J. (Eds.). *Constructivism in education.* Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum, [199-]